Semântica das Redes de Crenças

- Duas formas de entender:
  - representação da distribuição de probabilidade conjunta. Útil para **construir** redes.
  - conjunto de sentenças condicionalmente independentes. Útil para projetar procedimentos de inferência.
- Representando distribuição de probabilidade conjunta:
  - cada entrada na tabela pode ser calculada através da info na rede.
  - uma entrada genérica representa a probabilidade de uma conjunção de valores atribuídos a cada variável: $P(X_1 = x_1 \wedge \ldots \wedge X_n = x_n)$.
    $P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid Pais(X_i))$

Construção de Redes de Crenças

- cada entrada na tabela é representada pelo produto dos elementos apropriados das tabelas de probabilidades condicionais (TPCs).
- TPCs fornecem uma representação decomposta da distribuição conjunta.
- Exemplo:

  $P(J \wedge M \wedge A \wedge \neg B \wedge \neg E) = P(J \mid A)P(M \mid A)P(A \mid \neg B \wedge \neg E)P(\neg B)P(\neg E) = 0.9 \times 0.7 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.998 = 0.00062$
- Métodos melhores do que obter a tabela inteira de distribuição de probabilidade conjunta.

Construção de Redes de Crenças

- Método para construir redes de crenças:
  - Rede é construída de forma que cada nó é condicionalmente independente dos seus predecessores, dada a probabilidade dos seus pais.
  - equação $P(x_1, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i \mid Pais(x_i))$ usada para guiar o engenheiro de conhecimento a construir a topologia da rede.
  - Para construir uma rede de forma que esta tenha a estrutura correta para o domínio, escolhe-se nós pais adequados para garantir que cada nó é condicionalmente independente de seus antecessores.

Construção de Redes de Crenças

- Em geral:

  $\mathbf{P}(X_i \mid X_{i-1}, \ldots, X_1) = P(X_i \mid Pais(X_i))$, desde que $Pais(X_i)$ seja subconjunto ou igual a $\{x_{i-1}, \ldots, x_1\}$

- Esta condição é alcançada desde que se rotule os nós da rede em qq ordem q seja consistente com a ordem parcial implícita na estrutura do grafo.

- Ex: Mary telefona: não é **diretamente** influenciado por tentativa de assalto ou terremoto. É influenciado pelo efeito de tentativa de assalto ou terremoto, ou seja, soar o alarme.

- o Fato de John telefonar tb não tem influência direta sobre o fato de Mary telefonar. Neste caso temos independência condicional:

  $\mathbf{P}(MaryTel \mid JohnTel, Alarme, Terr, Assalto) = \mathbf{P}(MaryTel \mid Alarme)$

Construção de Redes de Crenças

- Procedimento geral para construção de redes:

1. Escolha o conj de variáveis X_i relevantes que descrevam o domínio.
2. Escolha ordem para as variáveis.
3. Eqto há vars:
   a) Pegue uma var X_i e adicione um nó na rede para X_i.
   b) Construir $Pais(X_i)$ com um conj mínimo de nós que já estejam na rede, tal que a prop de indep cond seja satisfeita.
   c) Defina a tabela de prob cond p/ X_i.

Construção de Redes de Crenças

- Procedimento garante que a rede é acíclica.
- Rede não contém valores de probabilidades redundantes.
- Garante que axiomas da prob não são violados.

Compactação e Ordenação de Nós

- Redes de crenças + **compactas** do que distribuição de prob conjunta.
- Sistemas **localmente estruturados** ou esparsos com info distribuída pelos nós.
- Crescimento polinomial.
- Em redes de crenças, podemos assumir que para a maioria dos domínios, cada variável aleatória é diretamente influenciada por no max k outras vars (nós pais).
- Qtde necessária de números para a TPC de cada nó: 2^k.
- Para a rede completa (n nós): $n2^k$.

Compactação e Ordenação de Nós

- Ex concreto: rede com 20 nós e no max 5 pais p/ cada nó:
  - redes de crença: 640 números.
  - tabela de distr de prob conj: ordem de 10^6 números.
- Número de links extra na rede = maior precisão, mas pode não se justificar devido ao aumento do tamanho das tabelas.
- Regra geral: adicionar à rede primeiro os nós causadores de algum efeito e depois seus efeitos.

Representação de TPCs

- Problema: escolher as probs condicionais das TPCs.
- Relação entre pais e filhos pode se encaixar numa distribuição canônica. Neste caso, probs podem ser especificadas através de nomes e talvez parms adicionais.
- Ex mais simples: nós determinísticos, probs são iguais as probs dos pais.
- Nós não determinísticos: relação *ruidosa* OU.
- Representação das probs:
  - Se todos os pais F, nó de saída F, com 100% de certeza.
  - Se apenas 1 dos pais é V, nó de saída é F com prob = parâmetro ruidoso daquele nó pai que é V.
- Ex: $P(Febre \mid Resf) = 0.4$, $P(Febre \mid Gripe) = 0.8$ e $P(Febre \mid Mal) = 0.9$

Resf	Gripe	Mal	P(Febre)	P($\neg$ Febre)
F	F	F	0.0	1.0
F	F	V	0.9	0.1
F	V	F	0.8	0.2
F	V	V	0.98	$0.02 = 0.2 \times 0.1$
V	F	F	0.4	0.6
V	F	V	0.94	$0.06 = 0.6 \times 0.1$
V	V	F	0.88	$0.12 = 0.6 \times 0.2$
V	V	V	0.988	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$

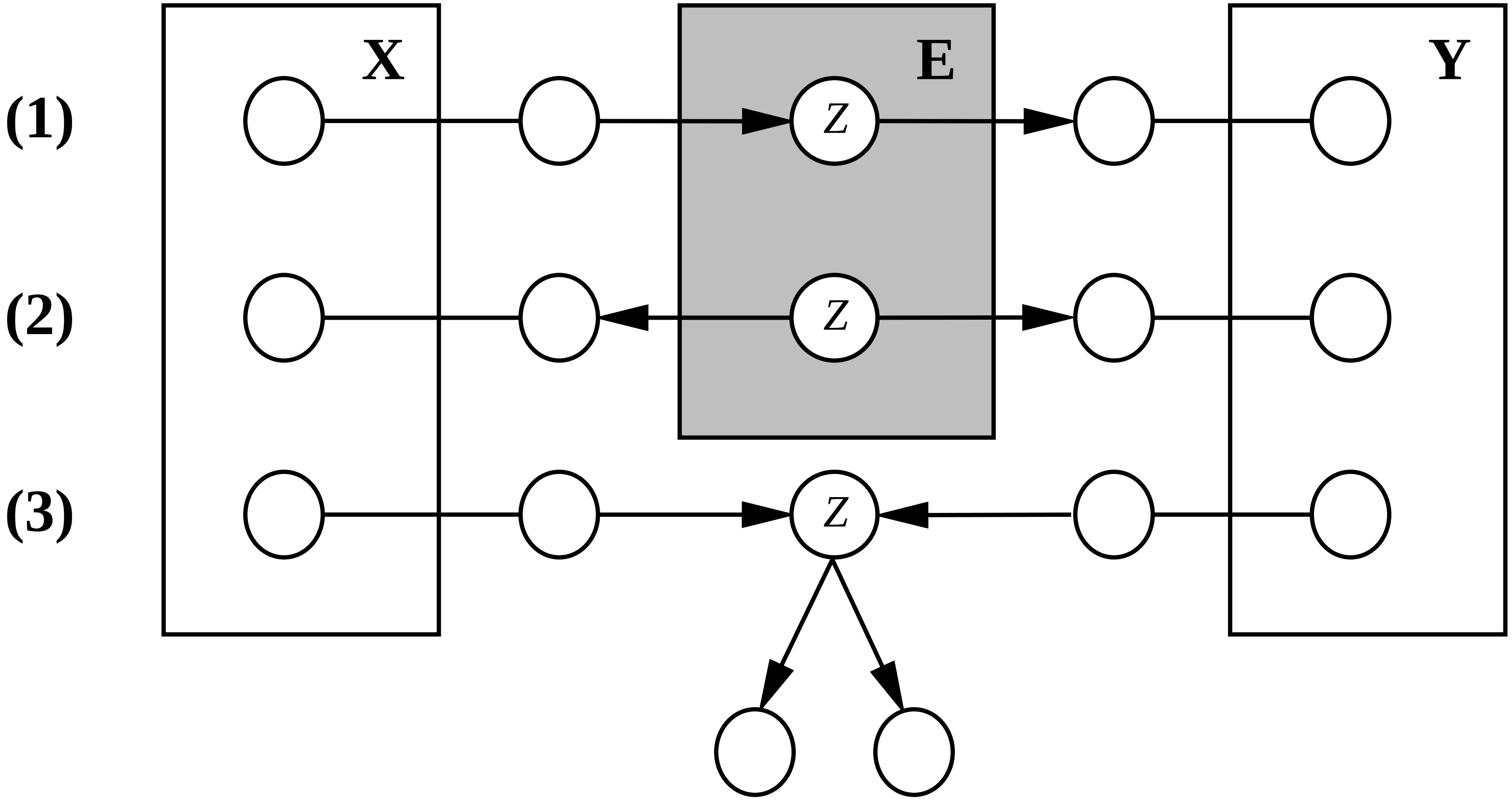
Relações de Independência Condicional

- Necessidade: saber se relações de independência condicional mais gerais (não somente de pais p/ filhos) existem para poder obter mecanismos de inferência capazes de responder consultas do tipo: "Existe algum conj de nós X independente de outro conj Y, dado conj de evidências E?"
- Método: **direction-dependent separation** ou **d-separation** (separação-d).
- separação-d: *se todo ramo não dirigido de um nó em X para um nó em Y é d-separado por E, então X e Y são condicionalmente independentes, dado E.*
- Um conj de nós E d-separa dois conj X e Y se todo ramo não dirigido de um nó em X para um nó em Y estiver **bloqueado**, dado E.

Relações de Independência Condicional

- Um ramo está bloqueado, dado um conj de nós E, se houver um nó Z no caminho tal que uma das três condições é satisfeita:
  1. Z está em E e Z tem um arco incidente e outro não incidente.
  2. Z está em E e Z tem ambos os arcos não incidentes.
  3. Nem Z nem nenhum descendente de Z estão em E, e ambos os arcos incidem em Z.

Relações de Independência Condicional



Inferência em Redes de Crenças

- Objetivo principal: computar distribuição de probabilidade posterior para um conj de variáveis de consulta, dados valores exatos para variáveis de evidência: $P(Cons \mid Evidencia)$.
- A princípio, qq nó pode servir como consulta ou evidência.
- Duas funções: BELIEF_NET_TELL p/ incluir novas evidências na rede e BELIEF_NET_ASK p/ computar novas probs p/ as variáveis de consulta.

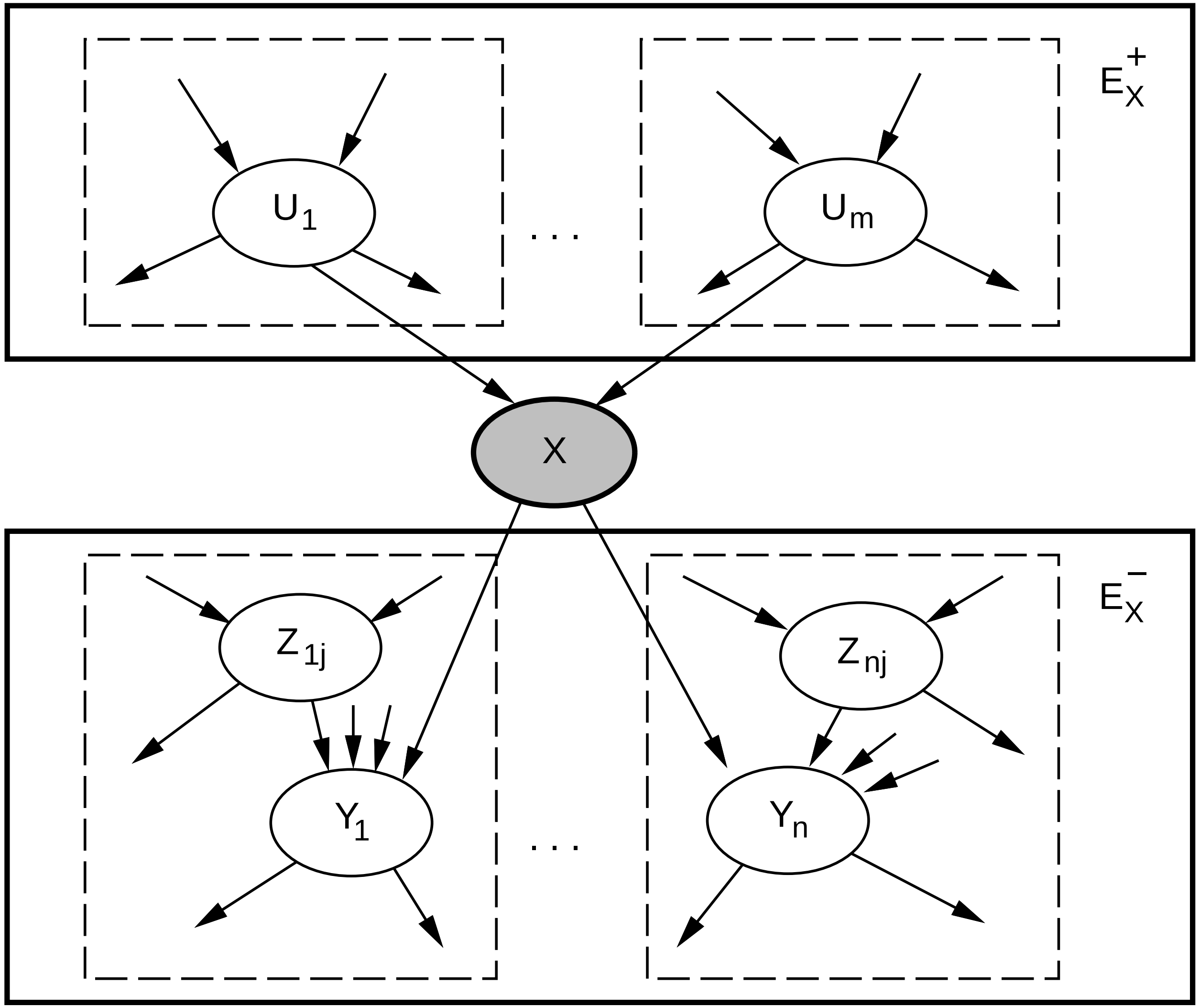
Inferência em Redes de Crenças

- **Diagnósticas**: $P(Assalto \mid JohnTel)$ (efeitos p/ as causas).
- **Causais**: $P(JohnTel \mid Assalto)$ (causas p/ os efeitos).
- **Inter-causais**: $P(Assalto \mid Alarme \wedge Terr)$.
- **Mistas**: combinação de 1 ou mais dos casos acima.
- Redes de crenças ainda podem ser usadas para:
  - tomar decisões baseadas em probs na rede e em funções de utilidade do agente.
  - decidir quais variáveis de evidência observar para obter info mais útil.
  - fazer “análise de sensibilidade” para entender aspectos do modelo que têm > impacto nas probs das vars de consulta.
  - Explicar os resultados da inferência probabilística para o usuário.

Inferência em Redes de Crenças

- Algoritmo BELIEF_NET_ASK análogo ao backward-chain, faz inferências a partir das variáveis de consulta até encontrar alguma evidência.
- Algoritmo funciona somente para redes "singly connected", onde há no máximo um ramo não dirigido entre quaisquer dois nós da rede: **poli-árvores**.
- Algoritmos para redes mais gerais usam algoritmos poli-árvore como sub-rotinas.

Inferência em Redes de Crenças



Inferência em Redes de Crenças

- Nó X tem pais U e filhos Y.
- "singly connected" significa que todos os blocos são disjuntos e não têm links.
- X é a variável de consulta.
- Objetivo: computar $P(X \mid E)$.
- Conjunto de **suporte causal**: variáveis de evidência "acima" de X que estão conectadas a X através dos pais.
- Conjunto de **suporte evidencial**: variáveis de evidência "abaixo" de X que estão conectadas a X através dos filhos.
- $E_{U_i|X}$: evidências conectadas com todos os nós U_i, *exceto* via o ramo que passa por X.

Inferência em Redes de Crenças

- Estratégia geral:
  - Representar $\mathbf{P}(X \mid E)$ em termos de contribuições de E_X^+ e E_X^-.
  - Computar a contribuição de E_X^+ através do seu efeito nos pais de X. Obs: computar os efeitos dos pais de X em X pode ser feito de forma recursiva.
  - Computar a contribuição de E_X^- através do seu efeito nos pais de X. Obs: computar os efeitos dos pais de X em X pode ser feito de forma recursiva.
- Método: aplicar Bayes, outros métodos padrão de prob, simplificações (independência condicional).

Inferência em Redes de Crenças

- $\mathbf{P}(X \mid E) = \mathbf{P}(X \mid E_X^-, E_X^+) = \frac{\mathbf{P}(E_X^- | X, E_X^+)\mathbf{P}(X | E_X^+)}{\mathbf{P}(E_X^- | E_X^+)}$
- Como X d-separa E_X^+ de E_X^- na rede, podemos usar indep cond p/ simplificar primeiro termo do numerador. Tb podemos usar $\frac{1}{\mathbf{P}(E_X^- | E_X^+)}$ como cte de normalização:
  $\mathbf{P}(X \mid E) = \alpha \mathbf{P}(E_X^- \mid X)\mathbf{P}(X \mid E_X^+)$
- $\mathbf{P}(X \mid E_X^+) = \sum_u \mathbf{P}(X \mid \mathbf{u}, E_X^+) P(\mathbf{u} \mid E_X^+)$
- $\mathbf{P}(X \mid E_X^+) = \sum_u \mathbf{P}(X \mid \mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(u_i \mid E_X^+)$
- $\mathbf{P}(X \mid E_X^+) = \sum_u \mathbf{P}(X \mid \mathbf{u}) \prod_i \mathbf{P}(u_i \mid E_{U_i | X})$