Regra de Bayes – Normalização

- Considere novamente a equação para calcular a probabilidade de meningite dado enrijecimento do pescoço:
  $P(M \mid S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)}$
- Considere a possibilidade do paciente ter enrijecimento do pescoço e isto causar uma distensão dos músculos:
  $P(W \mid S) = \frac{P(S|W)P(W)}{P(S)}$
- **probabilidade relativa**: $(P(S \mid W) = 0.8$ e $P(W) = \frac{1}{1000})$.
  $\frac{P(M|S)}{P(W|S)} = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S|W)P(W)} = \frac{1}{80}$
- ie, distensão é 80 vezes mais frequente do que meningite, dado que o paciente tem enrijecimento dos músculos do pescoço.

Regra de Bayes – Normalização

- Em alguns casos, probabilidades relativas são suficientes para tomar decisões, mas em outros casos, há necessidade de calcular números mais precisos, sem precisar utilizar P(S) (probabilidade incondicional): **normalização**.

  $P(M \mid S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S)}$

  $P(\neg M \mid S) = \frac{P(S|\neg M)P(\neg M)}{P(S)}$

  Adicionando: (obs: $P(M \mid S) + P(\neg M \mid S) = 1$)

  $P(S) = P(S \mid M)P(M) + P(S \mid \neg M)P(\neg M)$

- Substituindo na regra de Bayes:

  $P(M \mid S) = \frac{P(S|M)P(M)}{P(S|M)P(M)+P(S|\neg M)P(\neg M)}$

- regra geral: $\mathbf{P}(Y \mid X) = \alpha\mathbf{P}(X \mid Y)\mathbf{P}(Y)$

Usando a Regra de Bayes: combinação de evidências

- Assuma:

  $P(Carie \mid DorDeDente) = 0.8$

  $P(Carie \mid MotorPrendeu) = 0.95$

- O que um(a) dentista pode concluir se o motor prendeu no dente em que o paciente sente dor?

- Usando tabela de distr. de prob. conjunta, bastaria consultar tabela para encontrar $P(Carie \mid DorDeDente \wedge MotorPrendeu)$.

- Usando Bayes:

  $P(Carie \mid DorDeDente \wedge MotorPrendeu) = \frac{P(DorDeDente \wedge MotorPrendeu \mid Carie) P(Carie)}{P(DorDeDente \wedge MotorPrendeu)}$

Usando a Regra de Bayes: combinação de evidências

- esta forma pode levar a um número exponencial de valores de probabilidade se tivermos conjunções com mais variáveis. Por que não voltar a usar tabela de prob. conjunta neste caso?
- Polêmica entre pesquisadores que decidiram adotar métodos aproximados para tratar combinações de evidências, invés de teoria das probabilidades.

Usando a Regra de Bayes: combinação de evidências

- Em alguns domínios, Bayes pode ser simplificada e usar menos valores de probabilidades para produzir resultados: **atualização bayesiana** (*bayesian updating*).

$$P(Carie \mid DorDeDente) = P(Carie)\frac{P(DorDeDente \mid Carie)}{P(DorDeDente)}$$

- qdo MotorPrendeu é observado, aplicamos novamente Bayes com DorDeDente como variável condicional de contexto:

$$P(Carie \mid DorDeDente \wedge MotorPrendeu) = P(Carie \mid DorDeDente)\frac{P(MotorPrendeu|DorDeDente \wedge Carie)}{P(MotorPrendeu|DorDeDente)}$$

- Em atualização bayesiana, cada vez que uma nova evidência é observada, a crença é multiplicada por um fator que depende da nova evidência.

Usando a Regra de Bayes: combinação de evidências

- Ainda está complicado!
- $P(MotorPrendeu \mid DorDeDente \wedge Carie)$ não é mais fácil de ser calculado do que $P(DorDeDente \wedge MotorPrendeu \mid Carie)$!
- observação chave: cárie é causa direta da dor de dente e do motor ter agarrado ao dente, neste exemplo.
- Simplificação: **independência condicional** de DorDeDente e de MotorPrendeu, dado Carie:

$$P(MotorPrendeu \mid Carie \wedge DorDeDente) = P(MotorPrendeu \mid Carie)$$
$$P(DorDeDente \mid Carie \wedge MotorPrendeu) = P(DorDeDente \mid Carie)$$

- Simplificando:

$$P(Carie \mid DorDeDente \wedge MotorPrendeu) =$$
$$P(Carie)\frac{P(DorDeDente|Carie)}{P(DorDeDente)}\frac{P(MotorPrendeu|Carie)}{P(MotorPrendeu|DorDeDente)}$$