Função potencial

Função *potencial* $\Phi(s)$: é uma função do estado s do sistema que satisfaz

1. $\Phi(0) = 0$
2. $\forall i \in \mathbb{N}, \Phi(i) \geq 0$

a uma quantidade positiva (a vai ser o custo amortizado), c_i o custo da i-gésima operação e $\Phi(0) = 0$, $\Phi(1)$, $\Phi(2)\ldots$ os sucessivos valores da função potencial; supomos que o "pagamento" da n-ésima operação é efectuado da seguinte forma

– a é adicionado a $\Phi(i-1)$

– De $\Phi(i-i)$ retira-se o custo da operação corrente, c_i

Assim, $\Phi(i) = \Phi(i-i) + a - c_i$.
Teorema Se $\Phi(i)$ nunca é negativa, o valor a é um majorante do custo amortizado, isto é, para todo o $n \geq 0$ é $an \geq c_1 + c_2 + \ldots + c_n$.
Prova Somando as igualdades $\Phi(i) = \Phi(i-i) + a - c_i$ para $i = 1, 2, \ldots, n$ temos

$$\begin{aligned} \Sigma_{i=1}^{n}\Phi(i) &= \Sigma_{i=1}^{n-1}\Phi(i) + na - \Sigma_{i=1}^{n}c_i \\ na &= \Sigma_{i=1}^{n}c_i + \Phi(n) \\ a &\geq \frac{\Sigma_{i=1}^{n}c_i}{n} \end{aligned}$$

Por outras palavras, a é aceitável como custo amortizado, pois garante-se já "ter pago" em cada instante n todos os custos reais até esse momento.

Custo amortizado do contador binário

Contador representado na base 2 e uma sequência de n operações de incrementar (de 1 unidade).

Modelo de custo (de cada incremento): o número de bits do contador que mudam. Este custo representa razoavelmente o custo real e leva em particular em conta a propagação dos "carries". Por exemplo, se o contador `010111` é incrementado, fica `011000`, sendo o custo 4.
Teorema Embora o custo de algumas operações possa ser elevado, o custo amortizado não ultrapassa 2.
Os primeiros 8 incrementos:

bit 3	bit 2	bit 1	bit 0	custo	potencial
0	0	0	0		0
0	0	0	1	1	1
0	0	1	0	2	1
0	0	1	1	1	2
0	1	0	0	3	1
0	1	0	1	1	2
0	1	1	0	2	2
0	1	1	1	1	3
1	0	0	0	4	1

Análise com base numa função potencial

Vamos definir a seguinte função potencial

$$\Phi(x) = \text{número de 1's em } x$$

(ver figura anterior, "os primeiros 8 incrementos"). É óbvio que esta função satisfaz as condições 1 e 2. da definição. Vamos ver que esta função potencial corresponde ao custo amortizado de 2. Consideremos uma operação arbitrária de incremento,

$$\texttt{xx...x0}\,\overbrace{\texttt{11...11}}^{m} \rightarrow \texttt{xx...x1}\,\overbrace{\texttt{00...00}}^{m}$$

onde `x` representa um bit arbitrário e $m \geq 0$ (número de 1's consecutivos no final da representação binária). De uma forma mais compacta, representamos esta transição por $x01^m \rightarrow x10^m$.

Para mostrar que o custo amortizado 2 corresponde exactamente à função de potencial escolhida, analisemos em primeiro lugar a variação da função potencial numa transição $x01^m \rightarrow x10^m$. Representando por $n_1(x)$ o número de 1's de x, temos

– Potencial antes da operação: $n_1(x) + m$

– Potencial depois da operação: $n_1(x) + 1$

Por outras palavras, o número de 1's varia de $1 - m$ (diminui se $m = 0$, aumenta se $m \geq 1$).
Teorema Com $a = 2$ este potencial é igual ao valor acumulado (ainda não gasto).
Prova Usamos a indução. O caso base (inicial) é trivial. Consideremos novamente a transição $x01^m \rightarrow x10^m$ e suponhamos, pela hipótese indutiva, que o valor acumulado antes da operação é $n_1(x)+m$. De quanto varia o valor acumulado? A contribuição (custo amortizado) é 2 e há $m+1$ bits que mudam; logo, o valor acumulado varia de $2 - (m + 1) = 1 - m$ (esta variação pode ser positiva, nula ou negativa), o que é exactamente a variação do número total de 1's.
Observação. Após a primeira operação, o número de 1's nunca vai ser nulo, o que equivale a dizer que no fim, o potencial vai ser positivo.

Outra análise

Consideremos n incrementos. Quantas vezes o bit de ordem 0 se modifica? Todas, ou seja n. E o bit de ordem 1? Resposta: $\lfloor n/2 \rfloor$. No total, o número de mudanças de bit, isto é, o custo total, é

$$\begin{aligned} n + \lfloor n/2 \rfloor + \lfloor n/4 \rfloor + \ldots + 1 &\leq n + n/2 + n/4 + \ldots \quad \text{(soma infinita)} && (1)\\ &= 2n && (2) \end{aligned}$$

Assim concluímos que o custo amortizado é inferior a 2.