

## Minorantes de complexidade I

### Noções de majorante e de minorante complexidade de um problema P

#### Princípio da informação necessária

1. **Em cada caso:** (i) número de resultados possíveis (pretendidos). (ii) Número máximo de resultados possíveis com 3 pesagens, (iii) Que pode concluir?
  - (a) 12 bolas, todas com o mesmo peso excepto uma (que pode ser mais leve ou pesada que as outras). Determinar com um máximo de 3 pesagens qual a bola diferente e se é mais leve ou mais pesada que as outras. Cada pesagem pode ter 3 resultados: esquerda, direita ou equilibrado.
  - (b) 13 bolas, todas com o mesmo peso excepto uma... etc.
  - (c) 14 bolas, todas com o mesmo peso excepto uma... etc.
2. Um algoritmo (determinístico) que lê no máximo  $n$  bits, quantos resultados possíveis pode fornecer?
3. Princípio da informação necessária

#### Exemplo: ordenação de $n$ valores distintos

Modelo de custo: número de comparações.

Modelo externo dos dados.

Que pode concluir sobre o número de comparações que são necessárias (no pior caso)?

1. Cada resultado é uma permutação de  $(1, 2, \dots, n)$ . Por exemplo

$$[50, 10, 15, 29, 11] \rightarrow [5, 1, 3, 4, 2]$$

Quantos resultados possíveis há?

2. Se o algoritmo fizer  $c(n)$  “queries”<sup>1</sup> aos dados com resposta S ou N, quantos resultados pode haver no máximo?
3. Que conclui sobre o valor mínimo de  $c(n)$ ?
4. Use a aproximação de Stirling,  $n! \approx \sqrt{2\pi n}(n/e)^n$ , para exprimir (sem usar factoriais) o minorante que obteve de  $c(n)$ .

#### Exemplo: ordenação com custo 1 por cada troca

Modelo de custo: número de trocas (comparações... têm custo 0).

Alterações do vector só com trocas.

Mostre que

1.  $n - 1$  é um majorante do número de trocas (no pior caso).
2.  $n - 1$  é um minorante do número de trocas (no pior caso).
  - (a) Ciclos associados aos vectores a ordenar.
  - (b) Ciclos de um vector ordenado.
  - (c) Vectores só com 1 ciclo.
  - (d) Trocar 2 posições no mesmo ciclo.
  - (e) Trocar 2 posições em ciclos diferentes.
  - (f) Conclusão.

---

<sup>1</sup>do tipo “ $v[i] > v[j]$ ?”.