Armando Matos, 2008/2009

Tópicos Avançados em Algoritmos - Folha de exercícios 06

1. *Elemento de ordem fixa*
   Seja v um vector com n elementos. Mostre que, para qualquer inteiro não negativo fixo i é possível em tempo $O(n)$ com um algoritmo simples obter o elemento de ordem i do vector v. O que pode afirmar sobre o coeficiente de n relativo ao tempo de execução do algoritmo que descreveu?

2. Siga o algoritmo estudado para a selecção do elemento de uma ordem dada (tempo linear no caso médio) para o seguinte exemplo:

   ```
   elemento de ordem 9 (o maior elemento)
   v: [3  2  9  1  7  5  4  8  6]
   ```

   Utilize sempre como pivot o elemento mais à esquerda (índice a)

3. Considere o algoritmo estudado para a determinação da mediana com tempo $O(n)$ no pior caso. Averigue se o tempo de execução do algoritmo continua a ser de ordem $O(n)$ nos casos indicados em baixo. O modo mais simples e instrutivo é considerar o caso geral, divisão em grupos de k (com k ímpar) e aplicar o resultado obtido às 2 alíneas.

   (a) Divisão em grupos de 7 elementos.

   (b) Divisão em grupos de 3 elementos.

4. Apresente um exemplo de uma equação geral de uma recorrência em que tanto se aplique o Teorema das "Recorrências com solução $O(n)$"(Teorema 2) como o Teorema que já estudamos (Teorema 1); mostre que há concordância entre os 2 Teoremas.

Teorema 1
A solução de uma recorrência com a equação geral da forma $t(n) = at(n/b) + cn^k$ onde a e b são inteiros com $a \geq 1$ e $b \geq 2$, c e k são reais positivos, tem a seguinte ordem de grandeza

$$\begin{cases} t(n) \in \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^k \\ t(n) \in \Theta(n^k \log n) & \text{se } a = b^k \\ t(n) \in \Theta(n^k) & \text{se } a < b^k \end{cases}$$

Teorema 2 (Recorrências com solução $O(n)$)
Seja a equação geral de uma recorrência

$$f(n) = f(k_1 n) + f(k_2 n) + \ldots + f(k_p n) + cn$$

onde $c \geq 0$ e k_1, k_2,..., k_p são constantes positivas com $k_1 + k_2 + \ldots + k_p < 1$. Então $f(n)$ é de ordem $O(n)$. Inversamente, se $k_1 + k_2 + \ldots + k_k > 1$, então $f(n)$ não é de ordem $O(n)$.