Tópicos Avançados em Algoritmos

1. Diga se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa.

(a) $1 + 2^2 + 3^2 \ldots + n^2$ é de ordem $O(n^2)$

(b) É possível multiplicar 2 matrizes quadradas de dimensões $n \times n$ em tempo $O(n\sqrt{n})$

(c) Para qualquer função $f(n) : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ é $\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$.

(d) Seja $f(1) = 3$, $f(n+1) = 2f(n)$; para qualquer polinómio $p(n)$, não nulo e com coeficientes não negativos, temos $\lim_{n\to+\infty} p(n)/f(n) = 0$

2. (a) Mostre que para funções $f(n)$ e $g(n)$ $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ pode ser $f(n) \in \Theta(g(n)$ e $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$ não existir. <u>Nota.</u> se o limite $\lim_{n\to\infty} f(n)/g(n)$ existe, é $f(n) \in \Theta(g(n)$.

(b) Mostre que n^2 não é de ordem $O(n \log n)$.

3. (a) Resolva a recorrência $f(0) = 0$, $f(n) = f(n-1) + 3^n$.

(b) Usando o método "tabelar–suspeitar–demonstrar" resolva a recorrência $f(0) = 0$, $f(n+1) = f(n) + 2n$.

4. Suponha que se descobria que é possível multiplicar 2 matrizes de dimensões $2n \times 2n$ com um algoritmo que efectua 6 multiplicações (recursivas) de matrizes de dimensões $n \times n$ mais um conjunto de operações (adições de matrizes) cujo tempo não excede an^2 em que a é uma constante positiva. Qual a ordem total, como função de n, do tempo de execução de um algoritmo que usa esta ideia?

5. Considere o problema do "stack" com redimensionamento, usando-se a estratégia de quadriplicar o tamanho vector sempre que ele fica cheio. Assim temos

```
-  +  -  -  +  -  -  -  ... há redimensionamento?
1  4  4  4 16 16 16 16  ... tamanho do vector após PUSH
1  2  3  4  5  6  7  8  ... tamanho do "stack" após PUSH
0  1  0  0  4  0  0  0  ... custo do redimensionamento
1  1  1  1  1  1  1  1  ... custo do PUSH
1  2  1  1  5  1  1  1  ... custo total
```

Determine um custo amortizado, tão baixo quanto possível, para uma sequência de n `PUSH`'s; mais especificamente, deverá obter como resultado uma constante inferior a 3. Mostre que, qualquer que seja o factor de aumento do vector (2, 4,...), o custo amortizado (uma constante!) não pode ser inferior a 2.

Pode usar os seguintes resultados dados nas aulas teóricas:

- Suponhamos que a equação geral da recorrência tem a forma

$$a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = b^n p(n)$$

onde b é uma constante e $p(n)$ é um polinómio em n; seja d o seu grau. Então as soluções da recorrência com a equação geral indicada podem obter-se a partir das raízes da equação

$$(a_0 r^k + a_1 r^{k-1} + \cdots + a_k)(r-b)^{d+1} = 0$$

usando o método que foi explicado para o caso das equações homogéneas.

- A solução de uma recorrência com a equação geral da forma $t(n) = at(n/b) + cn^k$ onde a e b são inteiros com $a \geq 1$ e $b \geq 2$, c e k são reais positivos, tem a seguinte ordem de grandeza

$$\begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } a > b^k \\ \Theta(n^k \log n) & \text{se } a = b^k \\ \Theta(n^k) & \text{se } a < b^k \end{cases}$$