Tópicos Avançados em Algoritmos - prova I

1. Diga se cada uma das seguintes afirmações é verdadeira ou falsa (não é necessário justificar)

(a) $1+2+3\ldots+n$ é de ordem $\Theta(n^2)$

(b) Para qualquer função $f(n):\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ é $\Theta(f(n)) = O(f(n))\cap\Omega(f(n))$.

(c) Seja $f(1)=3$, $f(n+1)=2f(n)+2$; para qualquer polinómio $p(n)$, não nulo e com coeficientes não negativos, temos $\lim_{n\to+\infty} p(n)/f(n) > 0$

(d) É possível multiplicar 2 matrizes quadradas de dimensão $n\times n$ em tempo $\Omega(n)$

2. (a) Seja $g(n)$ uma função $\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$; defina $O(g(n))$.

(b) Mostre que $n^3+8n^2+5\in O(n^3)$.

3. (a) Usando o método "tabelar–suspeitar–demonstrar" resolva a recorrência $f(1)=0$, $f(2n) = f(n)+2\log(n)+1$. Tabele para $n=1,\ 2,\ 4,\ldots$. Tabele também $\log n$.

(b) Usando (A) resolva a recorrência $f(0)=0$, $f(n)=2f(n-1)+2^n$.

4. Considere um contador binário e n operações de `INCR` (incremento de 1) sendo 0 o valor inicial e suponha que o custo de cada operação é o número de bits que mudam de valor (de 0 para 1 ou de 1 para 0). Mostre directamente (determinando para cada ordem o número de mudanças do bit dessa ordem – número de mudanças do bit de ordem 0, número de mudanças do bit de ordem 1, etc.) que o custo total não excede $2n$. O que conclui sobre o custo amortizado da sequência de operações?

5. Sejam x e y inteiros de $2n$ bits. Para se efectuar o produto xy pode usar-se a seguinte partição de x e y em inteiros de n bits, onde a, b, c e d são inteiros de não mais de n bits

$$x = a2^n+b,\ y=c2^n+d,\ xy = ac\times 2^{2n}+(ad+bc)2^n+df$$

O tempo de execução de um algoritmo recursivo que efectua o produto xy segundo este esquema satisfaz $t(2n)=4t(n)+cn$ onde o termo cn inclui o tempo de execução das adições e o tempo do processamento dos "carries". Mostre que esta ideia não leva a melhoria na ordem de grandeza do tempo da multiplicação, relativamente ao algoritmo clássico (" escolar").

Pode usar os seguintes resultados dados nas aulas teóricas:

(A) Suponhamos que a equação geral da recorrência tem a forma

$$a_0f_n + a_1f_{n-1}+\cdots+a_kf_{n-k} = b^np(n)$$

onde b é uma constante e $p(n)$ é um polinómio em n; seja d o seu grau. Então as soluções da recorrência com a equação geral indicada podem obter-se a partir das raízes da equação

$$(a_0r^k+a_1r^{k-1}+\cdots+a_k)(r-b)^{d+1}=0$$

usando o método que foi explicado para o caso das equações homogéneas.

(B) A solução de uma recorrência com a equação geral da forma $t(n)=at(n/b)+cn^k$ onde a e b são inteiros com $a\ge 1$ e $b\ge 2$, c e k são reais positivos, tem a seguinte ordem de grandeza

$$\begin{cases} \Theta(n^{\log_b a}) & \text{se } a>b^k \\ \Theta(n^k\log n) & \text{se } a=b^k \\ \Theta(n^k) & \text{se } a<b^k \end{cases}$$