Complexidade 2007: folha prática nº 2

Ordens de grandeza

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

Relembra-se que

$$\begin{aligned} O(f(n)) &= \{g(n) \,:\, \exists k \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :\; g(n) \leq kf(n)\} \\ \Omega(f(n)) &= \{g(n) \,:\, \exists k \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :\; g(n) \geq kf(n)\} \\ \Theta(f(n)) &= \{g(n) \,:\, \exists k, k' \in \mathbb{R}^+, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n \geq n_0 :\; kf(n) \leq g(n) \leq kf(n)\} \end{aligned}$$

Diz-se muitas vezes "$g(n)$ é de ordem $f(n)$" em vez de "$g(n) \in O(g(n))$" (e de forma semelhante para as outras ordens de grandeza). Se não se disser nada em contrário, as funções envolvidas têm domínio $\mathbb{N}$ e contradomínio $\mathbb{R}_0^+$. Deve começar por resolver os exercícios marcador com "•". Depois resolva os restantes, incluindo ♣".

Nota. Nesta folha de exercícios e nas seguintes pode usar num determinado exercício os resultados demonstrados em exercícios anteriores.

Exercícios

1. • Determine a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações. Justifique. Nas últimas 3 alíneas (mas não nas anteriores) pode usar resultados relativos aos limites (ver por exemplo o exercício 11) e a regra de l'Hôpital.
   (a) n^2 é $O(n^4)$
   (b) n^2 é $O(5n^2+1)$
   (c) n^3 é $O(n^2)$
   (d) n é $O(\sqrt{n})$
   (e) $\ln n$ é $O(n^2)$
   (f) $\ln n$ é $O(\sqrt{n})$
   (g) 3^n é $O(2^n)$
2. Porque é que, apesar de ser verdade, não se diz normalmente "$3n^2$ é de ordem $O(2n^2+5)$"?
3. Mostre que o polinómio $a_k n^k + \cdots + a_1 n + a_0$ é de ordem $O(n^k)$. Os coeficientes podem ser negativos, sendo o polinómio considerado uma função de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}$.
4. Mostre que os seguintes conjuntos são iguais: $O(3n^2)$ e $O(2n^2+n+1)$.
5. Seja a um número real maior que 1; mostre que para nenhum $k \in \mathbb{N}$ a função a^n é de ordem $O(n^k)$.
   Sugestão. Mostre que $\lim_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k} = +\infty$.
6. Considere a seguinte relação binária entre funções (de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}_0^+$): $f(n)$ é $O(g(n))$. Averigue se a relação é
   (a) • Reflexiva.
   (b) Simétrica.
   (c) Anti-simétrica.
   (d) • Transitiva.
7. • Dê um exemplo de funções $f(n)$ e $g(n)$ de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $f(n) \notin O(g(n))$ e $g(n) \notin O(f(n))$. Justifique.

8. Suponha que consideramos apenas funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$. Mostre que a definição dada de $O(f(n))$ é equivalente à seguinte

$$O(f(n)) = \{g(n) \,:\, \exists k \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N} : \; g(n) \leq kf(n)\}$$

9. Mostre que, para qualquer função $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}_0^+$, se verifica a seguinte igualdade entre conjuntos

$$\Theta(f(n)) = O(f(n)) \cap \Omega(f(n))$$

10. Suponha que $f(n)$ e $g(n)$ são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}_0^+$. Mostre $f(n) \in O(g(n))$ sse $g(n) \in \Omega(f(n))$.

11. Suponha que $f(n)$ e $g(n)$ são funções de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$ tais que $\lim_{n\to\infty} \frac{f(n)}{g(n)}$ existe (este limite é necessariamente não-negativo); seja $a \in \mathbb{R}_0^+$ esse limite. Mostre que

    (a) • $f(n)$ é $O(g(n))$.

    (b) Se $a > 0$ então $f(n)$ é $\Theta(g(n))$.

12. ♣ Designemos por *exponencial* uma função $f(n)$ que seja de ordem $\Omega(c^n)$ para algum número real $c > 1$ e por *polinomial* uma função $f(n)$ que seja de ordem $O(n^k)$ para algum número inteiro $k \geq 0$. Esses conjuntos de funções são pois

$$\texttt{pol} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} O(n^k), \qquad \texttt{exp} = \bigcup_{c\in\mathbb{R}, c>1} \Omega(c^n)$$

    (a) Mostre que todo o polinómio é polinomial.

    (b) Mostre que nenhum polinómio é exponencial. Usando linguagem corrente, como pode comparar os crescimentos assintóticos de n^{10} e $(1.1)^n$?

    (c) Mostre que nenhuma função exponencial é de ordem $O(n^k)$, qualquer que seja o inteiro $k \in \mathbb{N}$.

    (d) Dê um exemplo de uma função não decrescente $f(n)$ que não seja polinomial nem exponencial. Como descreve em linguagem corrente o crescimento assintótico dessa função.