Complexidade 2007: folha prática nº 6

Reduções ("muitos para um") entre problemas de decisão / Teorema de Rice

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

1. *Uma redução...*

   Considere os problemas

   `PAP`: problema da auto-paragem, INSTÂNCIA: i; PERGUNTA: a computação $\{i\}(i)$ termina?

   `P0`: paragem com 0 nos dados, INSTÂNCIA: i; PERGUNTA: a computação $\{i\}(0)$ termina?

   (a) Mostre que `PAP` $\leq$ `P0`. Por definição de redução (muitos para um) deve definir uma função computável f que a cada instância i de `PAP` faz corresponder uma instância $j = f(i)$ de `P0`, tal que a resposta em `P0` a j (isto é, à pergunta $\{j\}(0)$ pára?) é SIM sse a resposta em `PAP` a i (isto é, à pergunta $\{i\}(i)$ pára?) é SIM.

   Note que ao definir $f(i)$ dispõe do argumento i e que, a partir de i, pode simular a MT com esse índice (ou programa `WHILE`, etc.), alterá-la, por exemplo, por forma a que escreva inicialmente na fita uma dada palavra, etc. A única restrição é que $f(i)$ dependa só de i e que seja computável e total.

   (b) *O que se pode concluir?*

   Sabendo que `PAP` é semi-decidível mas indecidível (isto é, a correspondente linguagem não é recursiva mas é r.e.). O resultado a que se chegou na alínea anterior mostra que

   – `P0` é indecidível.

   – `P0` é semi-decidível.

   – Não se pode concluir que `P0` é indecidível; para isso era necessário mostrar que `P0` $\leq$ `PAP`.

   Nota. Indique se cada uma das opções indicadas é verdadeira ou falsa e justifique.

2. *Reduções correctas?*

   Com este problema pretende-se esclarecer o conceito de redução entre 2 problemas de decisão. As seguintes reduções entre problemas de decisão estão correctas ou não? Porquê?

   Nota. Usamos os problemas:

   – `PGP`, problema geral da paragem, INSTÂNCIA: $\langle i,j\rangle$, PERGUNTA: a computação $\{i\}(j)$ termina?

   – `MAIOR`. INSTÂNCIA: par$\langle i,j\rangle$ de inteiros, PERGUNTA: $i > j$?

   (a) `PGP` $\leq$ `MAIOR`

   Seja $\langle i,j\rangle$ uma instância de `PGP`. Considere a seguinte função que a cada instância de `PGP` associa uma instâncias de `MAIOR`:

   $$f(\langle i,j\rangle) = \begin{cases} \langle 2,1\rangle & \text{se a computação } \{i\}(j) \text{ termina} \\ \langle 1,3\rangle & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

   <u>A função caracteriza correctamente a redução?</u>

   (b) `MAIOR` $\leq$ `PGP`

   Seja k o índice de uma MT particular que entre em computação "infinita", nunca saindo

do estado inicial e seja k' o índice de uma MT particular que pára logo no início. Seja ainda $\langle i, j\rangle$ uma instância de `MAIOR`. Se $i > j$, $f(\langle i, j\rangle)$ (instância de `PGP`) é $\langle k', 0\rangle$. Se $i \leq j$, $f(\langle i, j\rangle)$ (instância de `PGP`) é $\langle k, 0\rangle$.
A função caracteriza correctamente a redução?

3. Considere os problemas `PGP` e `MAIOR` da alínea anterior.

   (a) Classifique as respectivas linguagens $L_{\texttt{PGP}}$ e $L_{\texttt{MAIOR}}$. Classes a que podem pertencer:

   - Recursivas
   - r.e. mas não recursivas
   - co-r.e. mas não recursivas nem r.e.
   - nem r.e. nem co-r.e.

   (b) Classifique os problemas `PGP` e `MAIOR`. Classes a que podem pertencer:

   - Decidíveis (Dec)
   - Semi-decidíveis (S-Dec) mas não Dec
   - Complementares de S-Dec mas não S-Dec nem Dec
   - nem S-Dec nem complementares de S-Dec

4. Considere o problema de decisão seguinte: dado i, a função $\{i\}$ converge para o argumento 1 com resultado 2? Mostre, sem usar o Teorema de Rice que a linguagem associada a esse problema não é recursiva .
   Sugestão. Efectue uma redução entre L_{PAP} e essa linguagem.

5. *Uma trivialidade...*
   Um problema decidível diz-se "não trivial" se existe pelo menos uma instância para a qual a resposta é SIM e pelo menos uma instância para a qual a resposta é NÃO. Seja P um qualquer problema decidível não trivial e L_P a linguagem associada a P. Mostre que L_P é *completa* na classe das linguagens recursivas, isto é, que toda a linguagem recursiva se reduz a L_P.
   Nota. Como sabe a função associada a uma redução deve ser total e computável. Nada mais se impõe.

6. *Teorema de Rice*
   Usando o Teorema de Rice mostre que as seguintes propriedades das funções são indecidíveis.

   (a) Dado i, a função $\{i\}$ converge para o argumento 0? Ou, simbolicamente, "$\{i\}(0)\downarrow$"?

   (b) Dado i, a função $\{i\}$ diverge para o argumento $i+1$? Ou, simbolicamente, "$\{i\}(i+1)\uparrow$"?

   (c) Dado i, a função $\{i\}$ é total?

   (d) Dado i, a função $\{i\}$ converge para o argumento 1 com resultado 2? Ou, simbolicamente, "$\{i\}(1) = 2$"?

7. Quais dos problemas de decisão mencionados no problema 6 são semi-decidíveis? Complementares de semi-decidíveis?