

Complexidade 2007: folha prática nº 7

Problemas e linguagens associadas; codificações; introdução às reduções polinomiais
FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

Nota. Começar por estudar os conceitos, as notações e os problemas de decisão explicados nesta folha, após os problemas.

1. • *Juntando inteiros...*

Considerem-se os inteiros m e n escritos na base 2 e a seguinte representação do par (m, n) :
 $x = \overline{m}mn$.

- (a) Para $m = 5$ e $n = 9$ qual é a palavra x ?
- (b) Sendo $x = 01001010111$, qual o valor de m ? E o de n ?
- (c) Motre que a partir de x se pode decodificar univocamente as palavras m e n .
- (d) Qual o comprimento de x como função de m e n ? **Nota.** Na folha prática 1, vimos que a representação de n na base 2 tem comprimento $\lceil \log(n+1) \rceil$.

2. - Explique como codificar (no alfabeto $\{0,1\}$) um grafo não dirigido usando a técnica do problema 1 para o par (m, x) onde m é o número de vértices e x é a justaposição das linhas da matriz das adjacências.

3. *Codificando o problema CLIQUE*

Uma instância do problema CLIQUE é um par (n, G) . Usando a ideia do problema anterior, especifique uma codificação para este problema.

4. • *Resposta sim e resposta não...*

Para cada problema π indique uma instância pertencente a L_π e uma instância não pertencente a L_π . Não é necessário apresentar as codificações; por exemplo, para o caso do CLIQUE, basta apresentar, para cada instância, o tamanho do CLIQUE e um desenho do grafo.

- (a) • 3SAT; deve ser $U = \{a, b, c\}$.
- (b) • SAT; deve ser $U = \{a\}$.
- (c) • CLIQUE; nas instâncias (n, G) deve ser $n = 3$ (tamanho do clique) e o grafo conexo com 4 vértices.
- (d) • VC; nas instâncias (n, G) deve ser $n = 3$ (tamanho da cobertura) e o grafo conexo com 5 vértices.
- (e) • HP; o grafo deve ter pelo menos 4 vértices e ser conexo.
- (f) • HC; o grafo deve ter pelo menos 4 vértices e ser conexo.
- (g) • 3COL; o grafo deve ter pelo menos 4 vértices e ser conexo.

5. - Mostre que $3SAT \leq SAT$.

6. • Mostre que $HP \leq HC$ (ver também folha 8). Por definição de redução polinomial, deve caracterizar uma transformação f (computável em tempo polinomial) que transforma cada grafo não dirigido G num grafo não dirigido $f(G)$ tal que G tem um ciclo hamiltoniano sse $f(G)$ tem um caminho hamiltoniano; lembra-se que no caminho hamiltoniano os extremos têm que ser vértices distintos.

Alguns conceitos importantes para esta folha de exercícios

(explicados de forma sumária)

- Se x é uma palavra, $|x|$ é o seu comprimento; $|001| = 3$. Se x é uma palavra, $|x|$ é o comprimento da sua representação na base 2; por exemplo, $|9| = 4$.
- Seja a palavra $x = a_1a_2 \cdots a_n$; então $\bar{x} = 0a_10a_2 \cdots 0a_n1$, palavra de comprimento $2n + 1$. Por exemplo, $0\bar{1}0 = 0001001$. A partir de $\bar{x}xy$ pode obter-se univocamente x e y .
- Um grafo não dirigido $G = (V, E)$ é caracterizado por um conjunto V de nós (ou vértices) e por um conjunto E de ramos (ou arestas). Cada ramo (a, b) é um par não ordenado de nós distintos (isto é, (a, b) e (b, a) representam o mesmo ramo e é necessariamente $a \neq b$).
Exemplo: $U = \{(a, b, c, d)\}$ e $E = \{(a, b), (b, c), (c, d), (d, b)\}$; desenhe este grafo! Usando a ordem (a, b, c, d) , a matriz das adjacências é, representada pela justaposição das respectivas linhas, 0100101001010110; verifique!
- Um ciclo de um grafo não dirigido é uma sequência de ramos

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_n, a_1)$$

com $n \geq 1$. Um ciclo diz-se simples se todos os a_i , $1 \leq i \leq n$, são distintos.

Um caminho de um grafo não dirigido é uma sequência de ramos

$$(a_1, a_2), (a_2, a_3), \dots, (a_{n-1}, a_n)$$

Um caminho diz-se simples se todos os a_i , $1 \leq i \leq n$, são distintos.

- Codificação das instâncias de um problema de decisão π : função $c : \mathcal{I} \rightarrow \{0, 1\}^*$ que transforma cada instância $I \in \mathcal{I}$ de π numa palavra.
- Linguagem L_π associada ao problema de decisão π : $L_\pi = \{x : \text{resposta a } x \text{ no problema } \pi \text{ é SIM}\}$.
- Redução polinomial entre problemas
O problema de decisão A reduz-se polinomialmente ao problema de decisão B e escreve-se $A \propto B$ ou $A \leq_p B$ se existir uma função (total) f computável em tempo polinomial que transforma instâncias de A em instâncias de B e tal que $x \in L_A$ sse $f(x) \in L_B$.
A única diferença entre “redução polinomial” e “redução” (aprendida em Computabilidade) é o facto de $f(x)$ ter que ser computável em tempo polinomial (em $|x|$)

Alguns problemas de decisão...

Problema 3SAT (Satisfabilidade de cláusulas com 3 literais)

INSTÂNCIA: (U, C) onde U é um conjunto de variáveis lógicas e C é um conjunto de cláusulas (CNF) de 3 literais. Cada literal é uma variável de U ou uma variável de U negada. Em princípio, dentro da mesma cláusula cada variável ocorre no máximo uma vez; assim, $(u, v, \bar{u})$ não é uma cláusula.

PERGUNTA: Existe alguma valorização lógica das variáveis de U que satisfaça todas as cláusulas?

Exemplo de instância: (U, C) com $U = \{u, v, w, z\}$ e $C = \{(u, \bar{v}, \bar{w}), (u, v, w), (\bar{u}, w, \bar{z})\}$

C é entendido como $(u \vee \bar{v} \vee \bar{w}) \wedge (u \vee v \vee w) \wedge (\bar{u} \vee w \vee \bar{z})$.

Problemas 1SAT, 2SAT, etc.

Definidos de forma análoga a 3SAT.

Problema SAT (Satisfabilidade de cláusulas)

Definido de forma análoga a 3SAT, mas sem restrições no número de literais por cláusula (podem existir em C cláusulas com um qualquer número de literais, por exemplo $C = \{(u), (\bar{u}, v, \bar{w}), (\bar{u}, \bar{w})\}$).

Problema CLIQUE INSTÂNCIA: Um grafo não dirigido $G = (V, E)$ e um inteiro $k \leq |V|$.

PERGUNTA: Existe algum conjunto $V' \subseteq V$ com k vértices tal que $(u, v) \in E$ para quaisquer vértices distintos u e v de V' ?

Problema VC (Cobertura por vértices) INSTÂNCIA: Um grafo não dirigido $G = (V, E)$ e um inteiro $k \leq |V|$.

PERGUNTA: Existe algum conjunto $V' \subseteq V$ com não mais de k vértices ($|V'| \leq k$) tal que qualquer ramo do grafo tem pelo menos uma das extremidades em V' ?

Problema HC (ciclo hamiltoniano). INSTÂNCIA: Um grafo não dirigido G .

PERGUNTA: Existe em G um ciclo que passe uma e uma só vez por cada vértice do grafo?

Problema HP (Caminho hamiltoniano). INSTÂNCIA: Um grafo não dirigido G .

PERGUNTA: Existe em G um caminho que passe uma e uma só vez por cada vértice do grafo? Nada se impõe sobre os vértices extremos do caminho, para além de serem distintos.

Problema 3COL (colorir um grafo com 3 cores). INSTÂNCIA: Um grafo não dirigido $G = (V, E)$.

PERGUNTA: G pode ser colorido com 3 cores, isto é, existe uma função $f : V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ tal que $i \neq j \Rightarrow f(i) \neq f(j)$?