

Complexidade 2007: folha prática nº 9

Reduções polinomiais, problemas completos na classe NP

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

1. Mostre que o seguinte problema, ciclo mais longo (CML), é completo em NP.

INSTÂNCIA: Grafo $G = (V, E)$, inteiro $n \leq |V|$.

PERGUNTA: Existe em G um ciclo simples com n ou mais vértices?

2. (semelhante a um problema da folha anterior) Considere os problemas de decisão seguintes
HP (caminho hamiltoniano):

INSTÂNCIA: Grafo não dirigido G .

PERGUNTA: Existe um caminho hamiltoniano no grafo G (entre 2 quaisquer vértices distintos)?

HP* (caminho hamiltoniano com extremos especificados):

INSTÂNCIA: $\langle G, x, y \rangle$ em que G é um grafo não dirigido, x e y são vértices distintos de G .

PERGUNTA: Existe um caminho hamiltoniano no grafo G com extremidades x e y ?

Mostre que $HP \propto HP^*$

3. Mostre que o seguinte problema (VIDRO) é NP-completo:

INSTÂNCIA: Um multi-conjunto de pares de inteiros (a_i, b_i) , $1 \leq i \leq m$, que representam os lados de m rectângulos e um par de inteiros (a, b) , sendo $\sum_{i=1}^m a_i \times b_i = a \times b$.

PERGUNTA: É possível “cortar” o rectângulo de lados (x, y) de modo a obter exactamente (sem sobras) os m rectângulos de dimensões (a_i, b_i) ?

Sugestão Reduza PART a VIDRO; faça a redução de modo que, para a resposta ser SIM, na instância imagem os rectângulos tenham que ficar com todos os lados de dimensões a_i paralelos.

4. Mostre que o seguinte problema, conjuntos disjuntos (DISJ), é completo em NP.

INSTÂNCIA: Família $\mathcal{C}$ de conjuntos finitos e inteiro $n \leq |\mathcal{C}|$.

PERGUNTA: Existem n conjuntos disjuntos em $\mathcal{C}$?

Nota. Para a resolução deste problema pode utilizar o problema 3DM:

INSTÂNCIA: Conjuntos disjuntos A , B e C , todos com o mesmo número m de elementos e um conjunto de trios $Z \subseteq A \times B \times C$.

PERGUNTA: Existem m trios em Z , $(a_1, b_1, c_1), \dots, (a_m, b_m, c_m)$ tais que $A = \cup_{i=1}^m a_i$, $B = \cup_{i=1}^m b_i$ e $C = \cup_{i=1}^m c_i$ (isto é, tal que os primeiros elementos dos trios são todos distintos, o mesmo acontecendo com os segundos e terceiros elementos)?

Notas.

NPC e co-NPC são abreviaturas de “NP completo” e “co-NP completo”, respectivamente.

Para mostrar que um problema de decisão pertence à classe P, indique um algoritmo que o decida em tempo polinomial.

Para mostrar que um problema de decisão Π é completo na classe NP:

1. Argumente que Π pertence à classe NP, isto é, que, quando a resposta a uma instância x de Π é SIM, existe uma “testemunha” (ou “solução”) y verificável em tempo polinomial; por outras palavras, existe um predicado $\pi(x, y)$ computável em tempo polinomial e um polinómio $p(n)$ tais que

$$x \in L_{\Pi} \iff \exists y, |y| \leq p(|x|) \wedge \pi(x, y)$$

2. Escolha um dos 6 problemas básicos de decisão: 3SAT, Clique, VC, HC, PART, e 3DM. Seja P o problema escolhido. Mostre que $P \propto \Pi$, isto é, caracterize uma função f e Π de modo que
 - (a) A resposta a x em P seja SIM sse a resposta a $f(x)$ em Π for SIM.
 - (b) $f(x)$ seja computável em tempo polinomial em $|x|$.

- Para mostrar que Π é co-NP-completo, mostre que o problema co- Π (mesma instância, pergunta negada) é completo em NP.