Métodos de Apoio à Decisão

Pesquisa em árvore: aplicações

João Pedro Pedroso

2023/2024

Problemas de cobertura

Há seis cidades na zona do Porto, e o governo regional está a estudar onde deverá construir quartéis de bombeiros.
Cada cidade deverá ficar a menos de 15 minutos de pelo menos um quartel.
Os tempos de deslocação entre cidades são:

Cidade	1	2	3	4	5	6
1	0	10	20	30	30	20
2		0	25	35	20	10
3			0	15	30	20
4				0	15	25
5					0	14
6						0

Pretende-se determinar o número mínimo de quartéis a construir.

Formulação

- Variáveis ($i = 1, \ldots, 6$):
  - $x_i = 1$ se se constrói quartel na cidade i
  - $x_i = 0$ caso contrário
- Objetivo: minimizar $z = x_1 + x_2 + \ldots + x_6$
- Restrições:

$$
\begin{array}{lcccccccc}
\text{cidade 1:} & x_1 & +x_2 & & & & & \geq & 1 \\
\text{cidade 2:} & x_1 & +x_2 & & & & +x_6 & \geq & 1 \\
\text{cidade 3:} & & & x_3 & +x_4 & & & \geq & 1 \\
\text{cidade 4:} & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & & \geq & 1 \\
\text{cidade 5:} & & & & x_4 & +x_5 & +x_6 & \geq & 1 \\
\text{cidade 6:} & & +x_2 & & & +x_5 & +x_6 & \geq & 1
\end{array}
$$

Problemas da mochila

Knapsack problem

- Um ladrão está a fazer um assalto e tem à escolha uma série de objetos
  - valor
  - peso
- Para cada um deles, pode-o roubar ou não
  - i.e., não pode *dividir* objetos
- Leva-os numa mochila, que tem capacidade limitada
  - não pode levar mais de um determinado peso
- O que deve escolher para maximizar o valor?

Problemas da mochila: formulação

- Variáveis:
  - $x_i = 1$ se escolher o objeto i, $\qquad i = 1, \ldots, n$
  - $x_i = 0$ caso contrário
- Restrição: peso total inferior ao limite b:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \leq b$$

- Objetivo: maximizar valor

$$\sum_{i=1}^{n} c_i x_i$$

$$
\begin{array}{lllll}
\text{maximizar } z = & c_1 x_1 + & c_2 x_2 + & \ldots + & c_n x_n \\
\text{sujeito a:} & a_1 x_1 + & a_2 x_2 + & \ldots + & c_n x_n \leq b \\
& x_i \in \{0,1\}, \quad i = 1, \ldots, n & & &
\end{array}
$$

- Neste caso, a relaxação linear pode ser resolvida facilmente:
  - escolher objetos disponíveis por ordem do rácio c_i/a_i
  - no primeiro objeto que não couber:
    - colocar a fração que ainda caberia, enchendo completamente a mochila.
- Há (no máximo) uma variável fracionária; seja k
- Ramificação: num ramo $x_k = 0$ e no outro $x_k = 1$

Exemplo

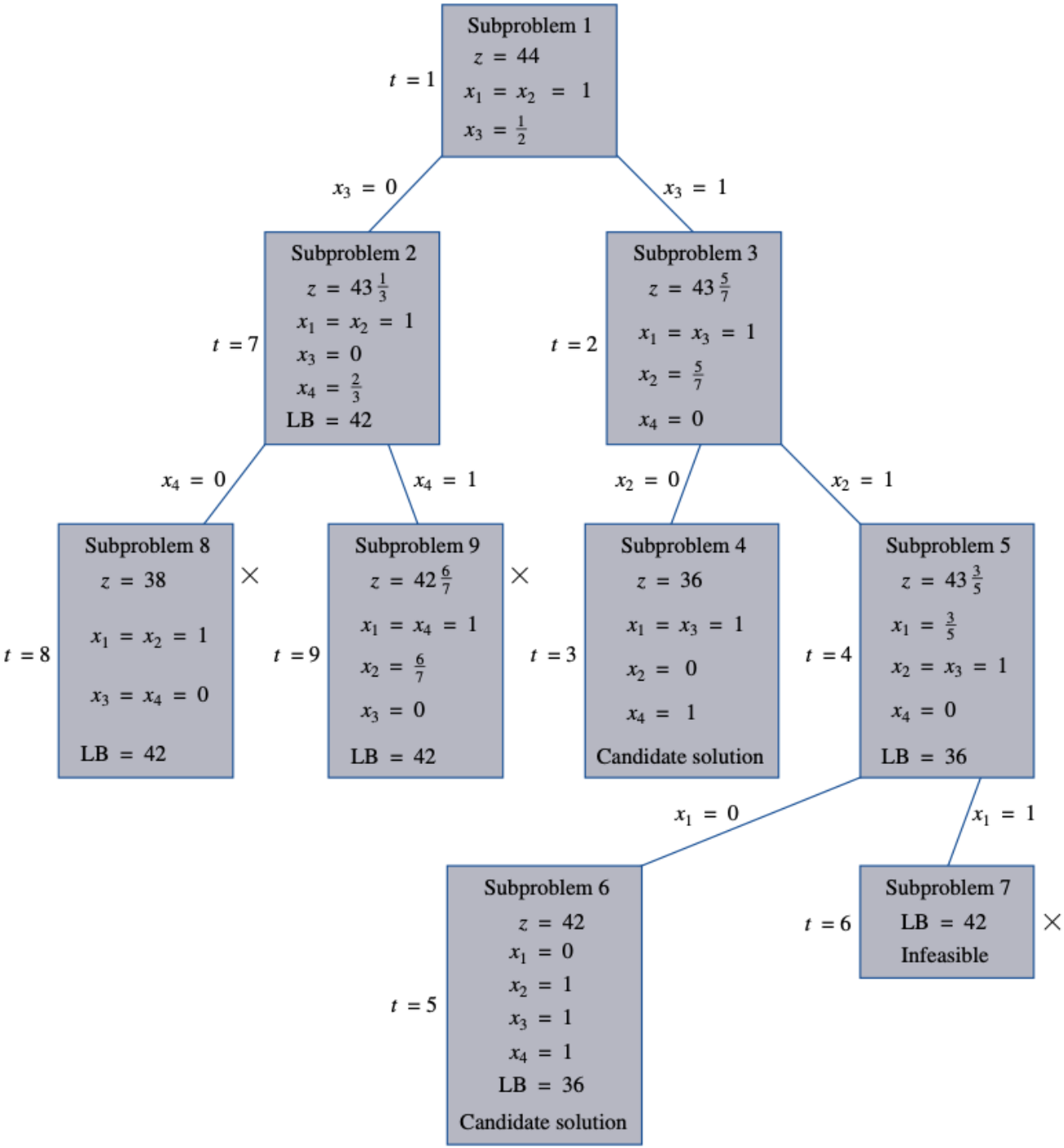
$$\begin{aligned} \text{maximizar } z = & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{sujeito a: } & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

item	c_i/a_i	ranking
1	3.20	1
2	3.14	2
3	3.00	3
4	2.67	4

$$\begin{aligned} \text{maximizar } z = & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 \\ \text{sujeito a: } & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 \leq 14 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, \ldots, 4 \end{aligned}$$

Na raiz da árvore de pesquisa:

- colocamos o item 1 $\rightarrow$ fica $14 - 5 = 9$
- colocamos o item 2 $\rightarrow$ fica $9 - 7 = 2$
- item 3 no espaço que resta $\rightarrow$ 1/2 do item $\rightarrow$ fracionário


Subproblem 1
$z = 44$
$x_1 = x_2 = 1$
$x_3 = \frac{1}{2}$
$t = 1$
$x_3 = 0$
$x_3 = 1$
Subproblem 2
$z = 43\frac{1}{3}$
$x_1 = x_2 = 1$
$x_3 = 0$
$x_4 = \frac{2}{3}$
LB = 42
$t = 7$
Subproblem 3
$z = 43\frac{5}{7}$
$x_1 = x_3 = 1$
$x_2 = \frac{5}{7}$
$x_4 = 0$
$t = 2$
$x_4 = 0$
$x_4 = 1$
$x_2 = 0$
$x_2 = 1$
Subproblem 8
$z = 38$
$x_1 = x_2 = 1$
$x_3 = x_4 = 0$
LB = 42
$t = 8$
Subproblem 9
$z = 42\frac{6}{7}$
$x_1 = x_4 = 1$
$x_2 = \frac{6}{7}$
$x_3 = 0$
LB = 42
$t = 9$
Subproblem 4
$z = 36$
$x_1 = x_3 = 1$
$x_2 = 0$
$x_4 = 1$
Candidate solution
$t = 3$
Subproblem 5
$z = 43\frac{3}{5}$
$x_1 = \frac{3}{5}$
$x_2 = x_3 = 1$
$x_4 = 0$
LB = 36
$t = 4$
$x_1 = 0$
$x_1 = 1$
Subproblem 6
$z = 42$
$x_1 = 0$
$x_2 = 1$
$x_3 = 1$
$x_4 = 1$
LB = 36
Candidate solution
$t = 5$
Subproblem 7
LB = 42
Infeasible
$t = 6$

Notas

1. foi usada pesquisa em profundidade
   - decidiu-se arbitrariamente qual era o ramo esquerdo/direito
     - esquerdo $\rightarrow x_i = 0$
     - direito $\rightarrow x_i = 1$
   - seguindo primeiro o ramo da direita ($x_i = 1$)
2. solução ótima:
   - $z = 42$
   - $x_1 = 0, x_2 = x_3 = x_4 = 1$
3. a "melhor" variável não é usada

Pesquisa em árvore em otimização combinatória

- otimização combinatória $\rightarrow$ informalmente:
  - há um número finito de soluções admissíveis
  - pesquisa em árvore permite explorar o espaço de soluções de forma sistemática
    - outra forma: enumeração
  - branch-and-bound:
    - pesquisa em árvore com forma
    - é um dos métodos mais eficientes para procurar a melhor

Problema de sequenciamento de tarefas

Pretende-se sequenciar uma série de trabalhos numa máquina, sendo o objetivo minimizar o atraso total (i.e., o atraso nas entregas somado para todas as encomendas). Os tempos de processamento t_i e datas de entrega d_i são os da tabela que se segue:

Trabalho	t_i	d_i
1	6	8
2	4	4
3	5	12
4	8	16

Como se pode resolver o problema utilizando o algoritmo da pesquisa em árvore?

É-nos dada uma lista de n trabalhos que devem ser executados numa máquina, e para cada trabalho i o tempo de processamento t_i e a data de entrega d_i.
Pretende-se saber qual é a ordem de execução que minimiza o atraso total (i.e., a soma dos atrasos para todos os trabalhos).
Atraso de cada encomenda:

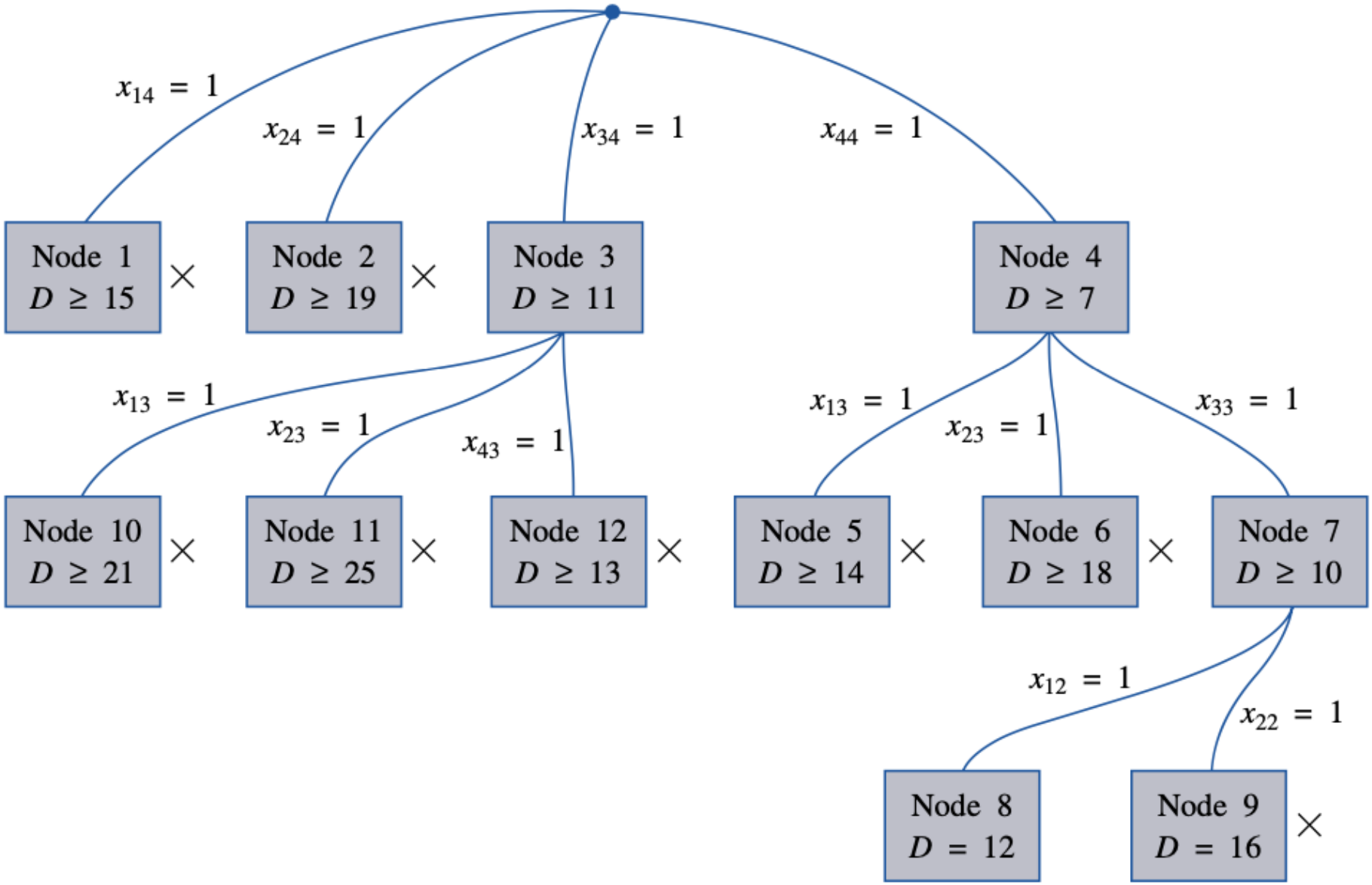
- zero se for entregue antes do limite d_i
- $t - d_i$, onde t é o instante de entrega, caso esta ocorra depois do limite

Resolução

- seja:
  - $x_{ij} = 1$ se o trabalho i é o j -ésimo a ser executado
  - $x_{ij} = 0$ caso contrário
- começa-se por particionar as soluções de acordo com o último trabalho a ser processado
- isso dá origem a n ramos na raiz da árvore de pesquisa
- em cada nó i pode-se determinar minorante do atraso total:

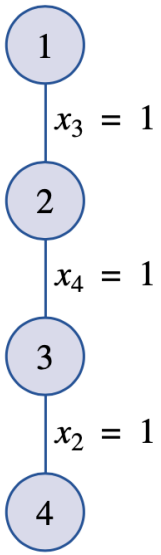
$$\sum_{j=1}^{n} t_j - d_i$$

- no nível seguinte, o *minorante* no atraso total no nó i é o atraso no primeiro nível mais $\sum_{j=1}^{n-1} t_j - d_i$;
- continua-se desta forma, até atingir as folhas da árvore de pesquisa
- nas folhas $\rightarrow$ atraso total da solução correspondente


$x_{14} = 1$
$x_{24} = 1$
$x_{34} = 1$
$x_{44} = 1$
Node 1
$D \geq 15$
Node 2
$D \geq 19$
Node 3
$D \geq 11$
Node 4
$D \geq 7$
$x_{13} = 1$
$x_{23} = 1$
$x_{43} = 1$
$x_{13} = 1$
$x_{23} = 1$
$x_{33} = 1$
Node 10
$D \geq 21$
Node 11
$D \geq 25$
Node 12
$D \geq 13$
Node 5
$D \geq 14$
Node 6
$D \geq 18$
Node 7
$D \geq 10$
$x_{12} = 1$
$x_{22} = 1$
Node 8
$D = 12$
Node 9
$D = 16$

Enumeração implícita

- Específico para problemas de otimização com variáveis binárias
- Permite fixar variáveis de forma sistemática
- Num dado momento da pesquisa:
  - variáveis fixas $\rightarrow$ foram-lhes atribuídos determinados valores
  - variáveis livres $\rightarrow$ ainda sem valor definido
  - *completion* (conclusão) $\rightarrow$ instanciação de valores para as variáveis livres



Enumeração implícita

Passos principais:

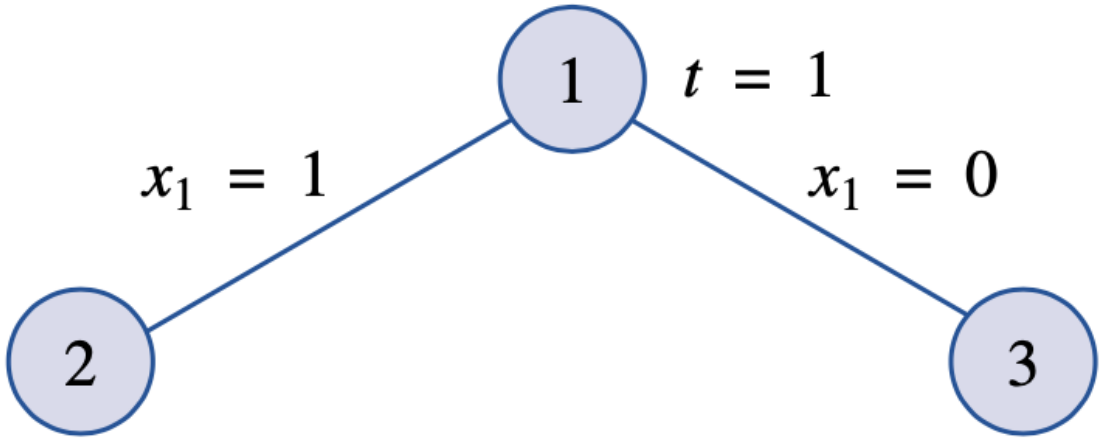
1. Num determinado nodo, dados os valores das variáveis fixas:
   - há alguma boa *conclusão* para as variáveis livres?
     - escolher o valor 0/1 que melhora o objetivo
   - se a *conclusão* é admissível $\rightarrow$ não é necessário ramificar
2. Se a melhor *conclusão* é admissível:
   - fornece *bound* (majorante ou minorante) para as *conclusões* possíveis a partir desse nodo
   - pode ser utilizado para eliminar o nodo, caso se conheça solução melhor que esse *bound*
3. Num dado nodo, há alguma forma de determinar se nenhuma *conclusão* é admissível?
   - para cada restrição, ver instanciação mais favorável de cada variável
   - se houver alguma restrição não satisfazível $\rightarrow$ eliminar nodo

Enumeração implícita: exemplo

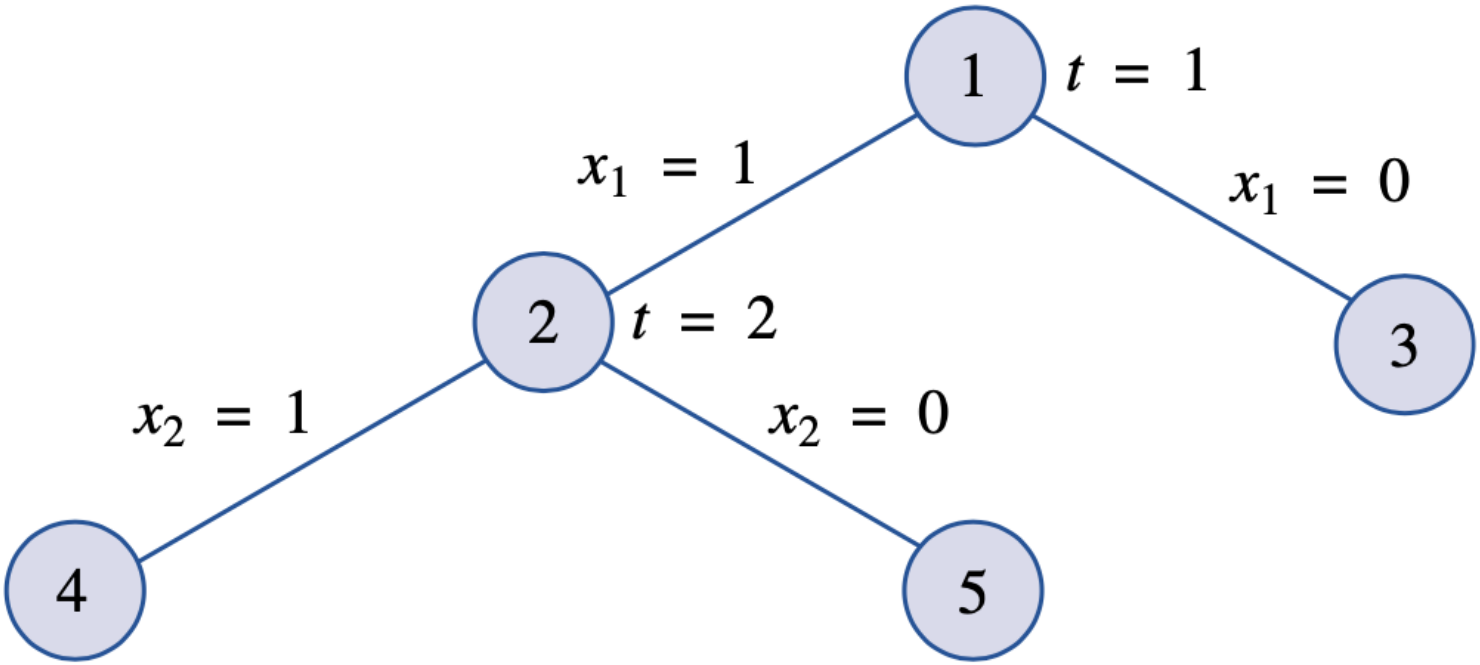
$$
\begin{aligned}
\max z = \quad & -7x_1 - 3x_2 - 2x_3 - x_4 - 2x_5 \\
\text{s.t.} \quad & -4x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 - x_5 \leq -3 \\
& -4x_1 - 2x_2 - 4x_3 + x_4 + 2x_5 \leq -7 \\
& x_i = 0 \text{ or } 1 \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5)
\end{aligned}
$$

Raiz

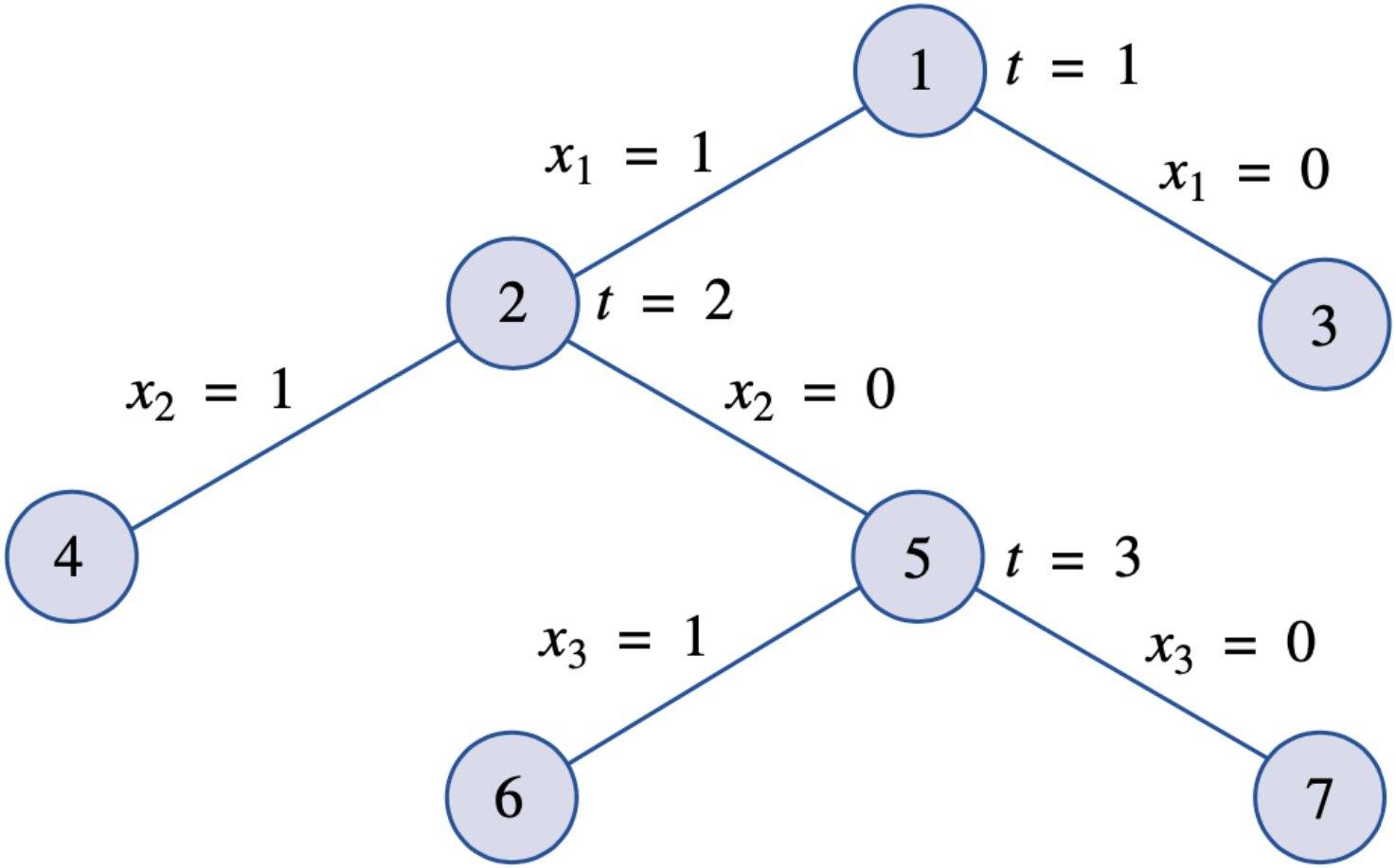
- Nodo 1: todos os $x_i = 0$
  - não é admissível
  - mas há *conclusões* admissíveis para o nodo 1
- Ramificar (arbitrariamente) por
  - $x_1 = 1 \rightarrow$ nodo 2
  - $x_1 = 0 \rightarrow$ nodo 3



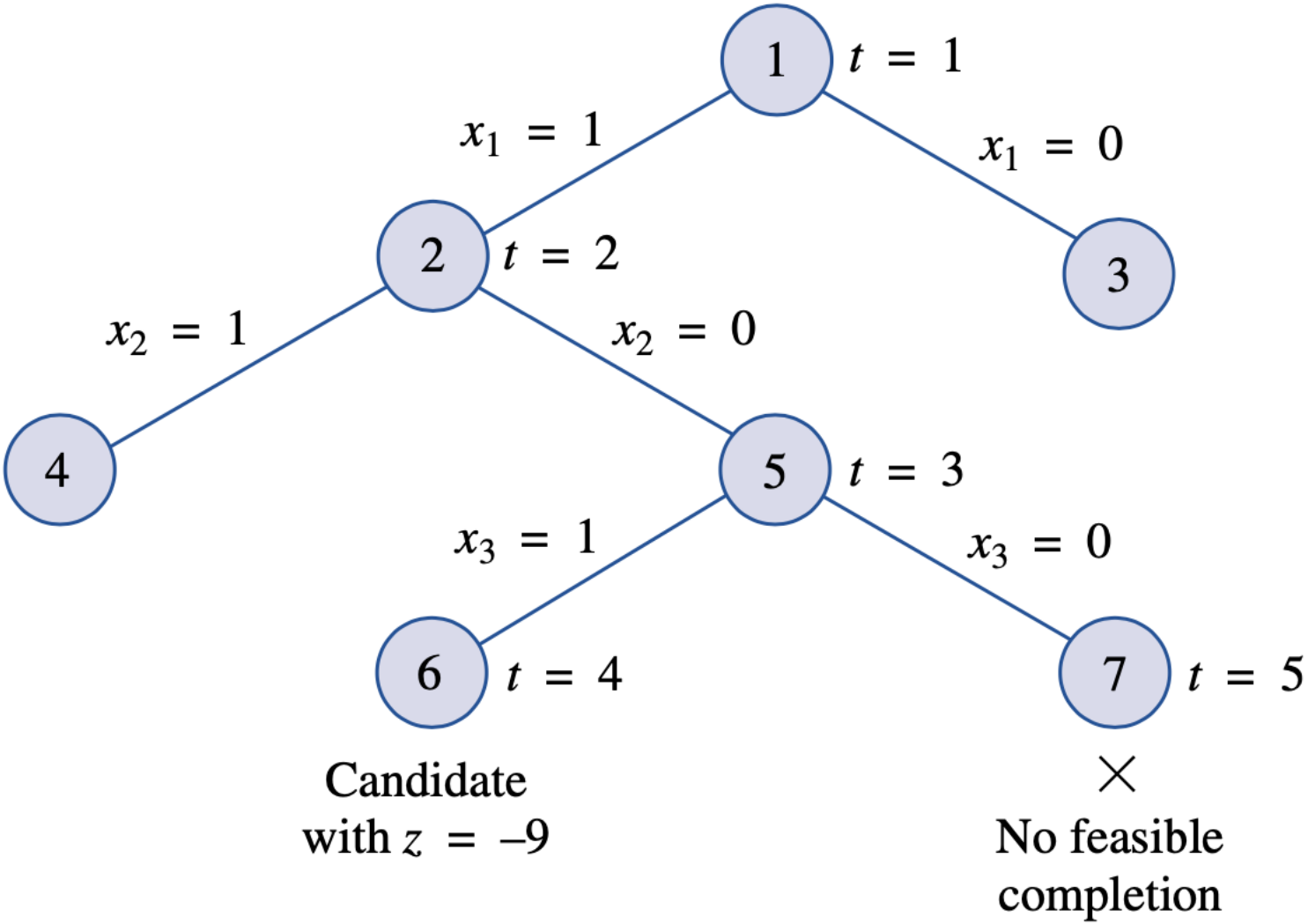
Ramificação do nodo 2



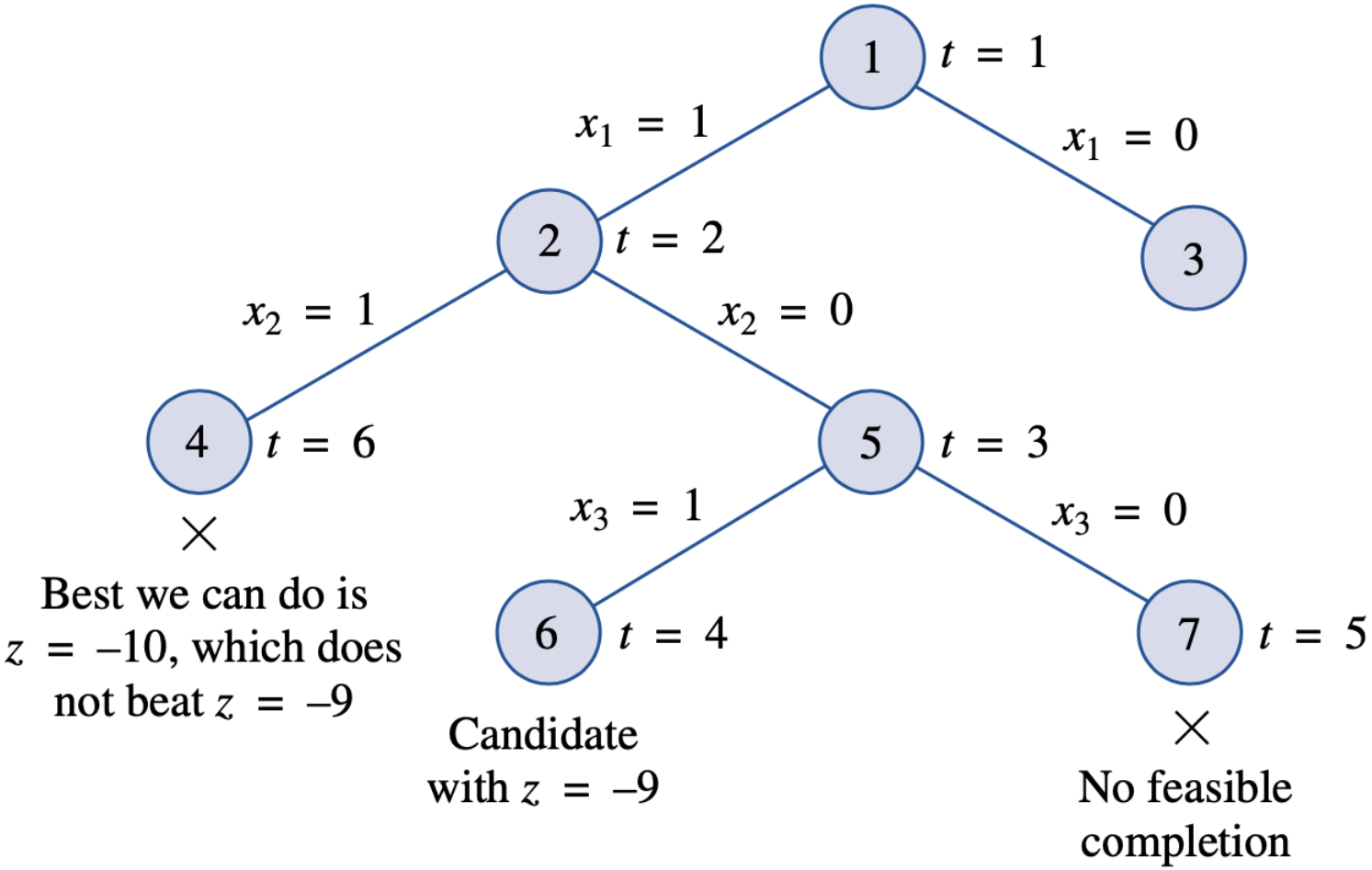
Ramificação do nodo 5



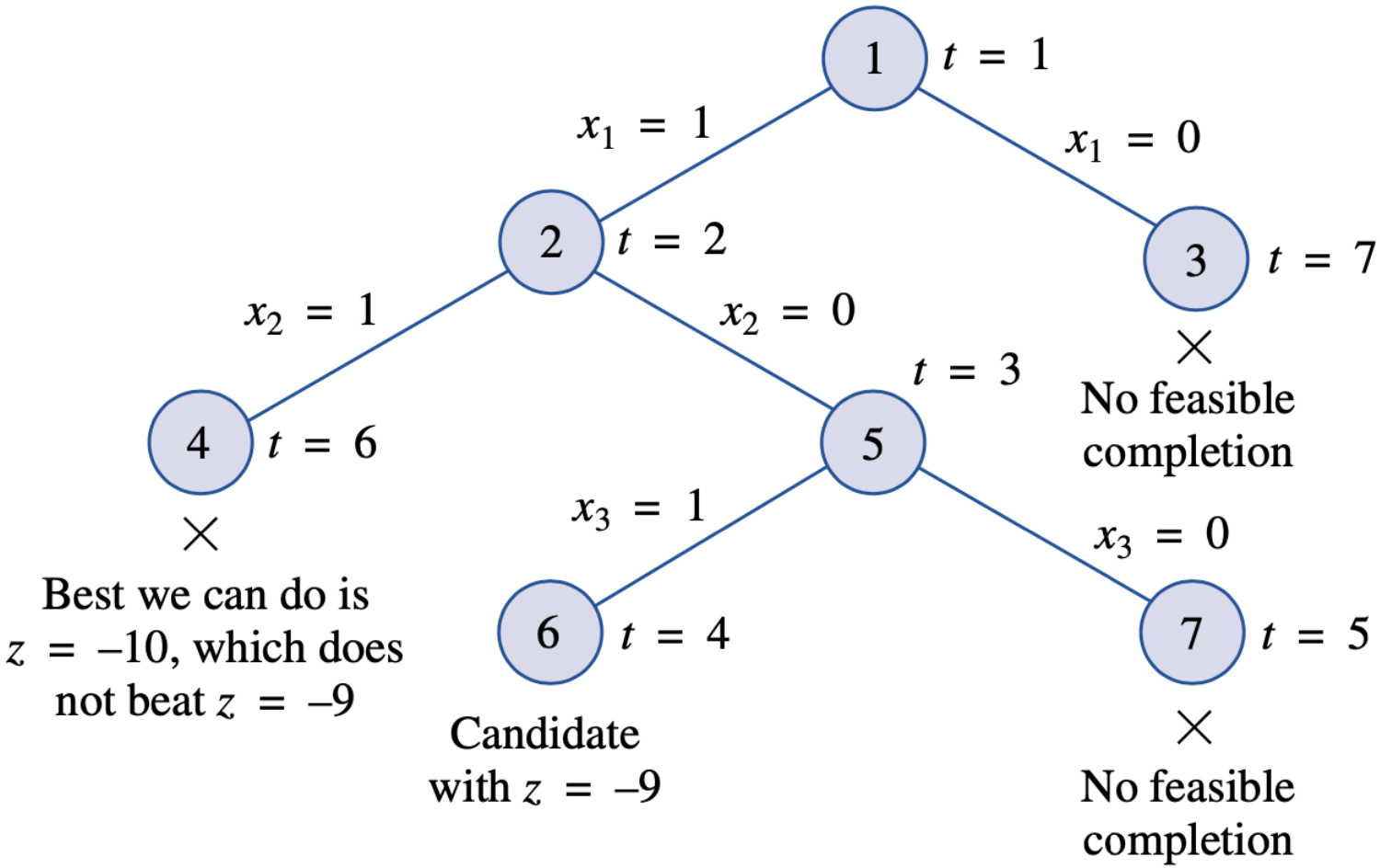
Ramificação do nodo 6



Ramificação do nodo 4



Ramificação do nodo 3



Aula de hoje:

- método da pesquisa em árvore para problemas específicos
- enumeração implícita

Próximas aulas:

- Problemas de otimização em grafos