Métodos de Apoio à Decisão

Programação por restrições

João Pedro Pedroso

2024/2025

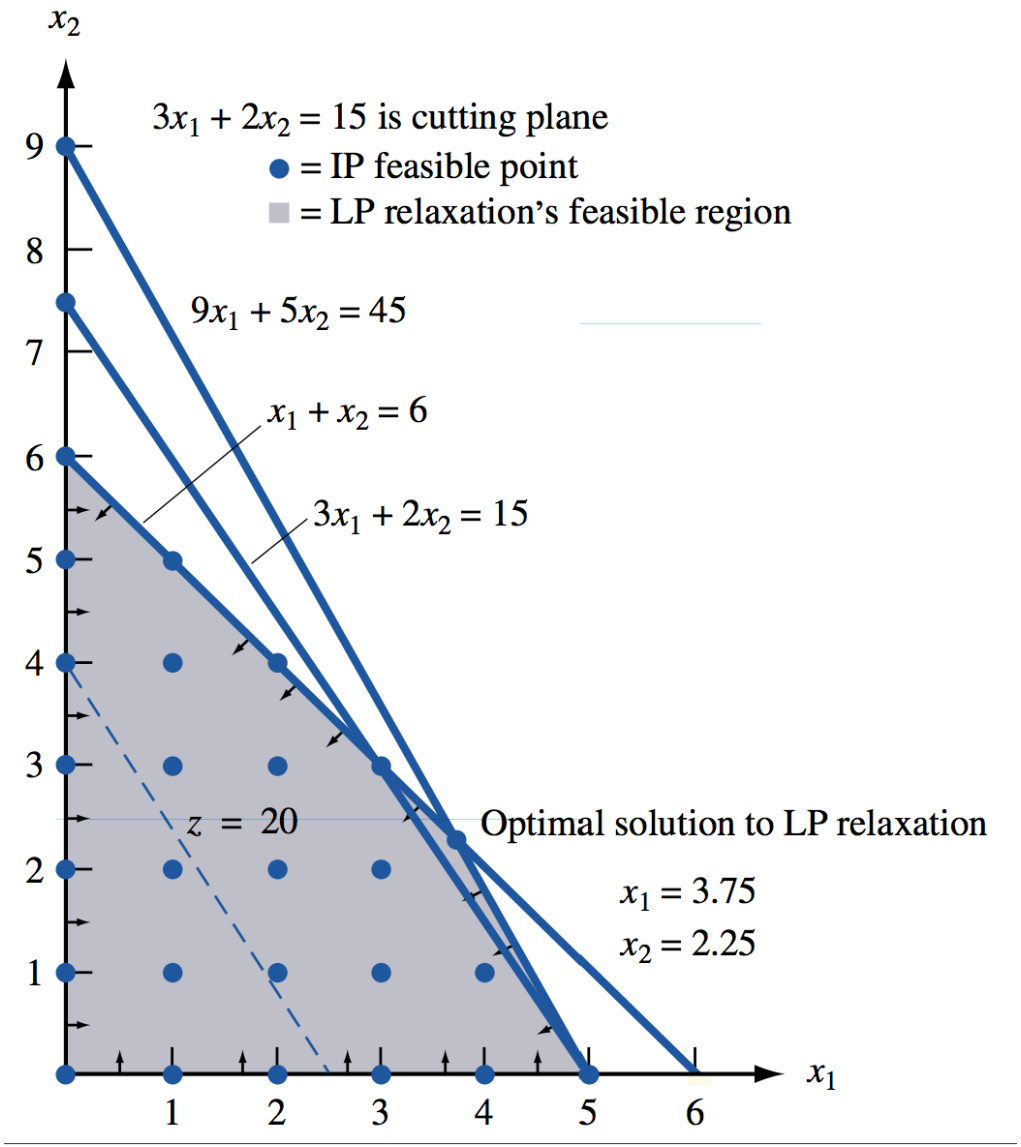
Última aula:

- problema de rotas de veículos (*vehicle routing problems*)
- algoritmo dos planos de corte de Gomory

Hoje:

- Introdução à programação por restrições

Planos de corte: exemplo



Planos de corte: cortes válidos

Corte válido: desigualdade que se adiciona tal que:

1. a solução da relaxação linear passa a ficar fora da região admissível;
2. todas as soluções inteiras do problema original continuam na região admissível.

Apresentação de resultados computacionais

10 simple rules:

1. For Every Result, Keep Track of How It Was Produced
2. Avoid Manual Data Manipulation Steps
3. Archive the Exact Versions of All External Programs Used
4. Version Control All Custom Scripts
5. Record All Intermediate Results, When Possible in Standardized Formats
6. For Analyses That Include Randomness, Note Underlying Random Seeds
7. Always Store Raw Data behind Plots
8. Generate Hierarchical Analysis Output, Allowing Layers of Increasing Detail to Be Inspected
9. Connect Textual Statements to Underlying Results
10. Provide Public Access to Scripts, Runs, and Results

source: `http://journals.plos.org/ploscompbiol/article?id=10.1371/journal.pcbi.1003285`

Resolução de problemas combinatórios

- **Otimização inteira:** ênfase em encontrar o *melhor objetivo*
- **Programação por restrições:** ênfase em encontrar *uma solução admissível*

Exemplos:

- coloração de grafos com número de cores fixo
- sudoku

Programação por restrições

Componentes fundamentais:

- **variáveis**
- **domínios**
- **restrições**

Programação por restrições

Restrições:

- Equações ou desigualdades (como as que vimos em otimização inteira)
- Restrições lógicas
- Restrições globais:
  - permitem especificar com um termo uma propriedade que determinadas variáveis devem possuir
  - muitas vezes, difíceis de exprimir com equações ou desigualdades
  - têm associados *solvers* específicos
  - exemplo: `AllDifferent(x1,x2,x3,x4,x5)` $\rightarrow$ as variáveis `x1,x2,x3,x4,x5` deverão todas ter valores diferentes
    - cada x_i deverá ter um domínio finito
    - *e.g.*, $x_i \in \{1, \ldots, 10\}$
    - sintaxe de `AllDifferent` depende do resolutor (iremos ver exemplo com AMPL)

Resolutores

- há muitos sistemas para resolução de problemas com programação por restrições
- alguns são específicos para um tipo de problemas (por exemplo, satisfazibilidade)
- os mais completos, implementam a maioria das restrições globais *"comuns"*
- infelizmente, não há uma interface comum a todos eles
  - AMPL suporta:
    - algumas restrições globais
    - operadores lógicos
    - sumário disponível aqui
      `https://ampl.com/resources/logic-and-constraint-programming-extensions/`

AMPL + Programação por restrições

- Sintaxe para programação por restrições em AMPL:
  - Operadores lógicos:
    - `and + or + not`
    - iterados: `exists + forall`
  - Operadores conditionais:
    - `if-then + if-then-else + ==> + ==> else + <== + <==>`
  - Operadores de contagem:
    - iterados: `count + atmost + atleast + exactly + numberof`
    - coletivos: `alldiff`
- Alguns resolutores
  - IBM ILOG CP (comercial; disponível no software fornecido `option solver ilogcp;`)
  - Gecode (software livre, disponível aqui)
  - JaCoP (software livre, disponível aqui)

Nota: O sistema GLPK não suporta programação por restrições

Exemplos

Localização

Localização espacial:

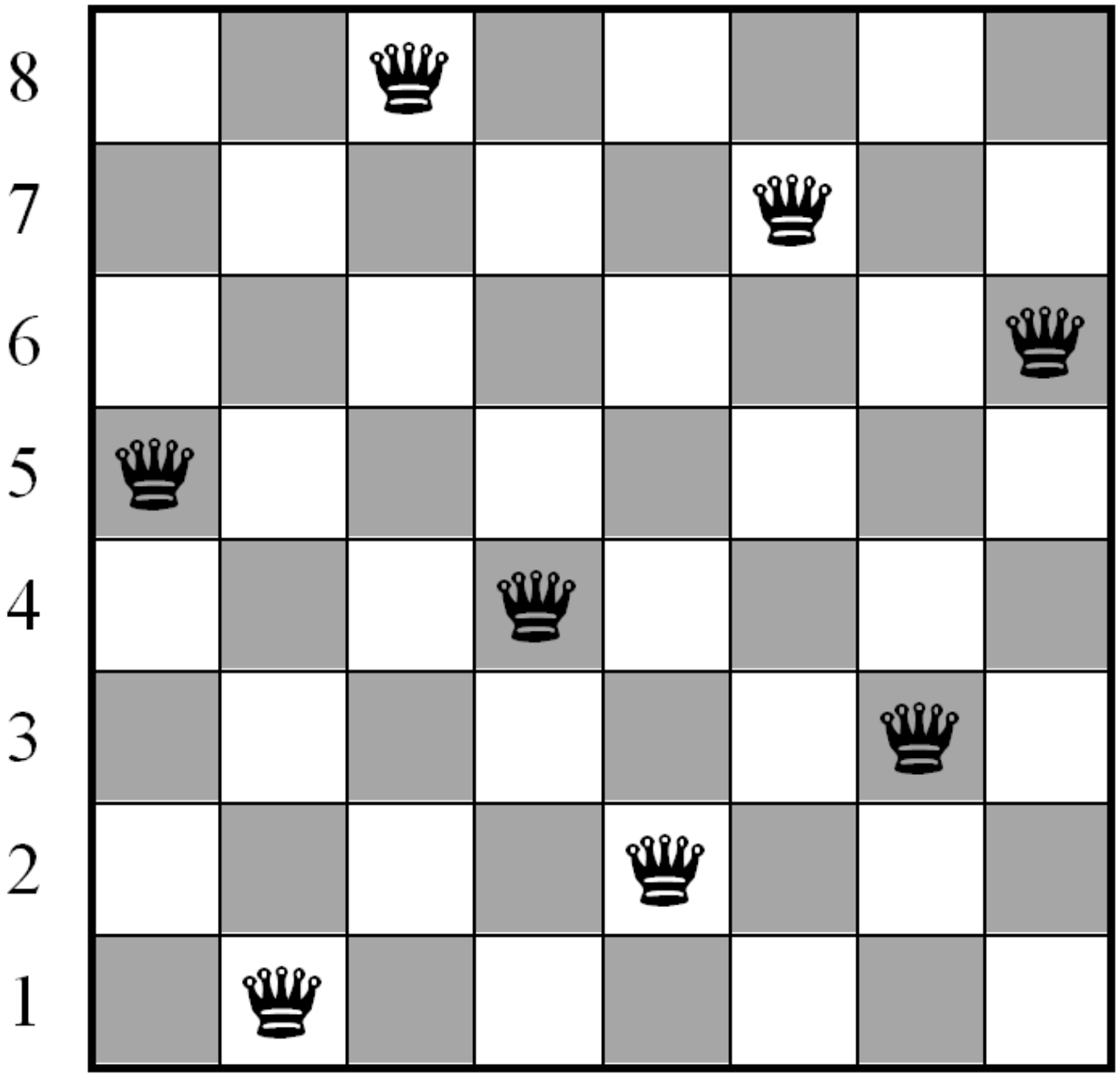
- grelha $n \times n$
- colocar n postos de observação em pontos da grelha
- custos de construção idênticos

Restrições de *não interferência*:

- postos não podem bloquear a vista de outros
  - linhas
  - colunas
  - diagonais

N-Queens problem

Queens



Queens: *Mathematical programming*

```
param n, integer, > 0, default 8;   /* size of the chess board */

var x{1..n, 1..n}, binary; /* x[i,j] = 1 --> a queen is placed in square [i,j] */

s.t.
a{i in 1..n}: sum{j in 1..n} x[i,j] <= 1; /* at most one queen in each row */
b{j in 1..n}: sum{i in 1..n} x[i,j] <= 1; /* at most one queen in each column */
/* at most one queen can be placed in each "\"-diagonal */
c{k in 2-n..n-2}: sum{i in 1..n, j in 1..n: i-j == k} x[i,j] <= 1;
/* at most one queen can be placed in each "/"-diagonal */
d{k in 3..n+n-1}: sum{i in 1..n, j in 1..n: i+j == k} x[i,j] <= 1;

/* place as many queens as possible: */
maximize obj: sum{i in 1..n, j in 1..n} x[i,j];

solve;              /* solve the problem */
for {i in 1..n}     /* and print its optimal solution */
{  for {j in 1..n} printf " %s", if x[i,j] then "Q" else ".";
   printf("\n");
}
end;
```

Programação por restrições

Programação por restrições

Componentes fundamentais:

- **variáveis**
- **domínios**
- **restrições**

Programação por restrições

Restrições:

- Equações ou desigualdades (como as que vimos em otimização inteira)
- Restrições lógicas
- Restrições globais:
  - permitem especificar com um termo uma propriedade que determinadas variáveis devem possuir
  - muitas vezes, difíceis de exprimir com equações ou desigualdades
  - têm associados *solvers* específicos
  - exemplo: `AllDifferent(x1,x2,x3,x4,x5)` $\rightarrow$ as variáveis `x1,x2,x3,x4,x5` deverão todas ter valores diferentes
    - cada x_i deverá ter um domínio finito
    - *e.g.*, $x_i \in \{1, \ldots, 10\}$
    - sintaxe de `AllDifferent` depende do resolutor (iremos ver exemplo com AMPL)

Queens: *Constraint programming*

```
param n integer > 0;

var x {1..n} integer >= 1 <= n;

subject to
col_conflicts:
    alldiff {i in 1..n} x[i];
diag1_conflicts:
    alldiff {i in 1..n} (x[i] + i);
diag2_conflicts:
    alldiff {i in 1..n} (x[i] - i);
```

Solução

```
ampl: model queensMIP.mod;
ampl: let n := 8;
ampl: option solver cplex;
ampl: solve;
[...]
Objective = find a feasible point.
```

```
ampl: model queensCP.mod;
ampl: let n := 8;
ampl: option solver ilogcp;
ampl: solve;
ilogcp 12.4.0: feasible solution
1731 choice points, 1458 fails
```

Tempos de resolução

	CP	MIP
n	ilogcp	cplex
50	0.27	0.94
100	0.39	1.36
150	0.61	5.73
200	1.20	125.86
250	1.11	441.39
300	1.62	1470.29
350	1.56	
400	2.18	
450	2.70	
500	4.15	

Próxima aula

- Programação por restrições: sudoku.