

T2 – Processamento de Sinal

Mestrado de Informática Médica

Miguel Tavares Coimbra

Resumo

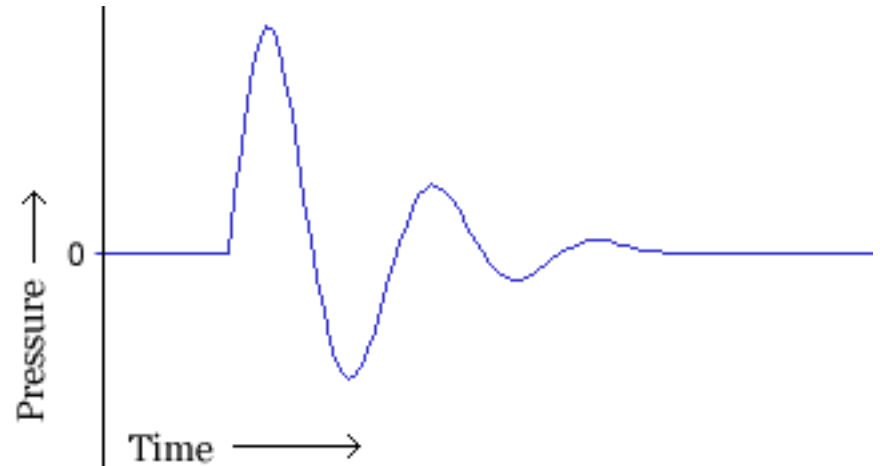
1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

Sinal biomédico

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

O que é um Sinal?

- **Definição tradicional de *Sinal***
 - Um sinal é uma grandeza que varia no tempo e/ou espaço.
- **Exemplos:**
 - $f(t)$ – Som
 - $f(x,y)$ – Imagem
 - $f(x,y,t)$ – Vídeo

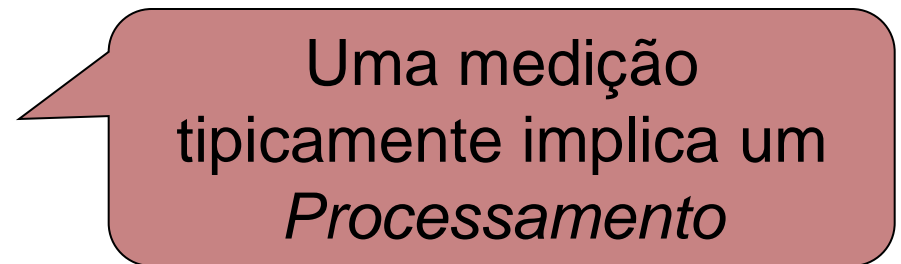
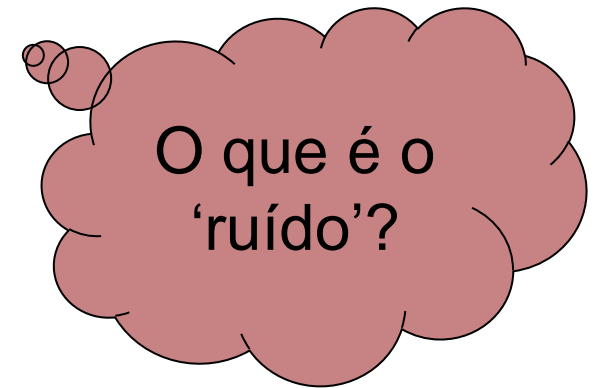


Sinais 'Reais'

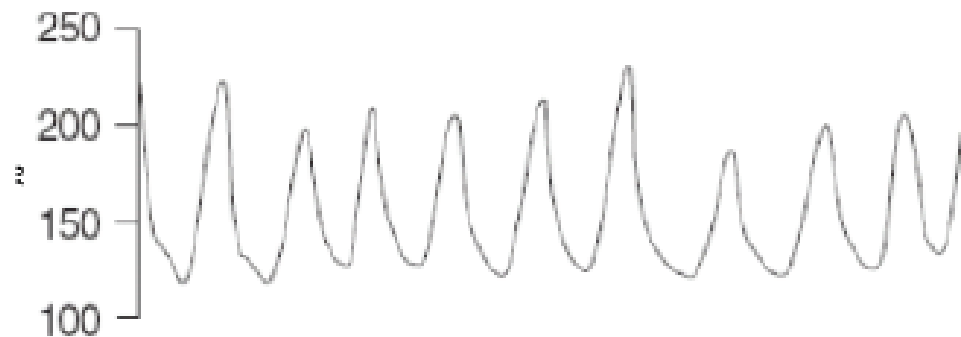
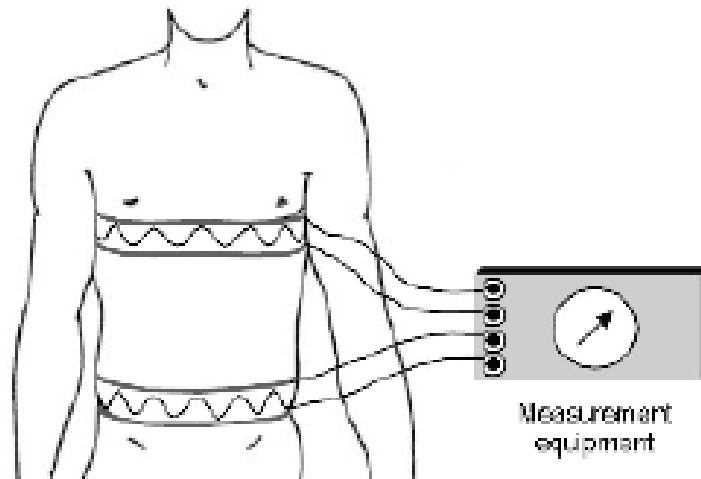
- Os sinais reais são *Analógicos*.
 - Variam continuamente no tempo.
 - Variam continuamente em amplitude.
- A análise de um sinal real implica uma medição.
- Sinais reais:
 - Pressão arterial
 - Temperatura corporal

Medição de um Sinal

- Um processo de medida implica erro.
- Logo: Qualquer sinal real têm ruído.
 - Altero a pressão dos pneus do carro quando a meço.
 - Altero a temperatura da água da banheira quando uso o termómetro.



Ritmo respiratório



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

Pressão arterial

- Pressão exercida pelo sangue contra a superfície interna das artérias

– Método Analógico (Contínuo)



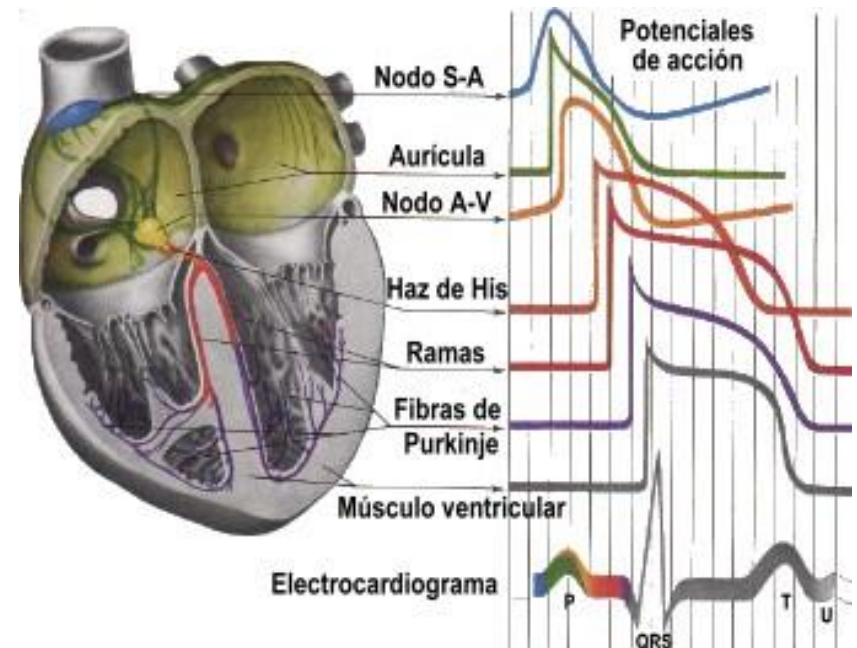
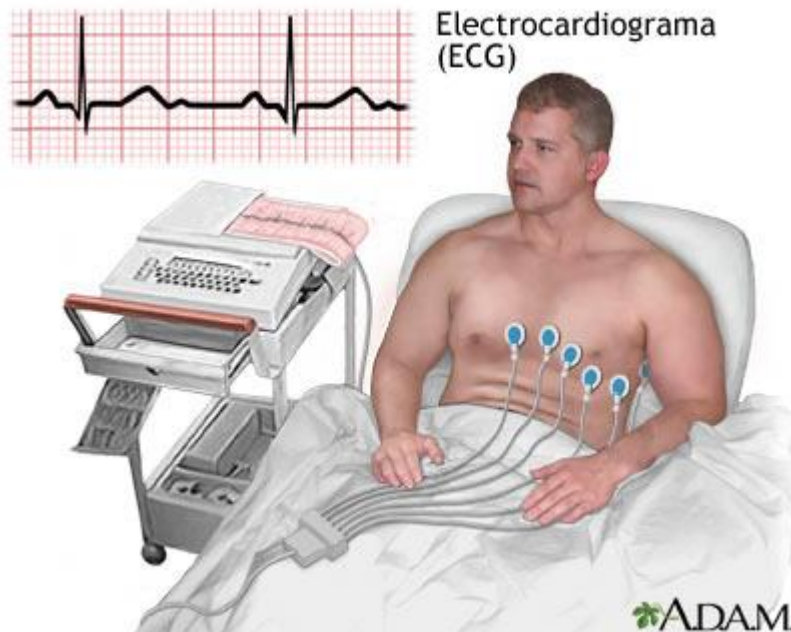
– Método Digital (Discreto)



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

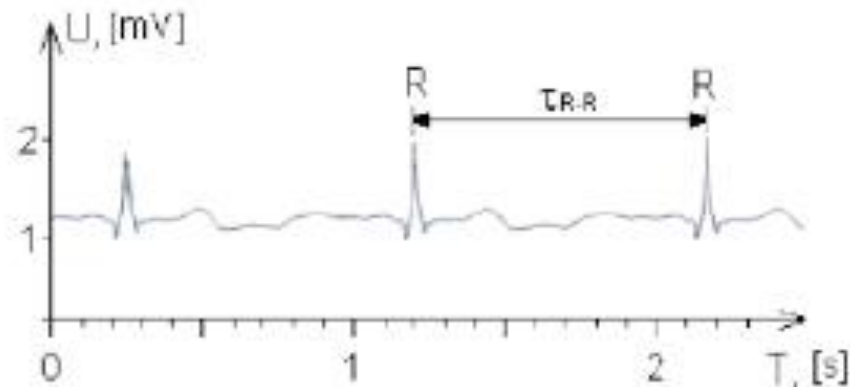
Electrocardiograma (ECG)

- Registo da actividade eléctrica do coração



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

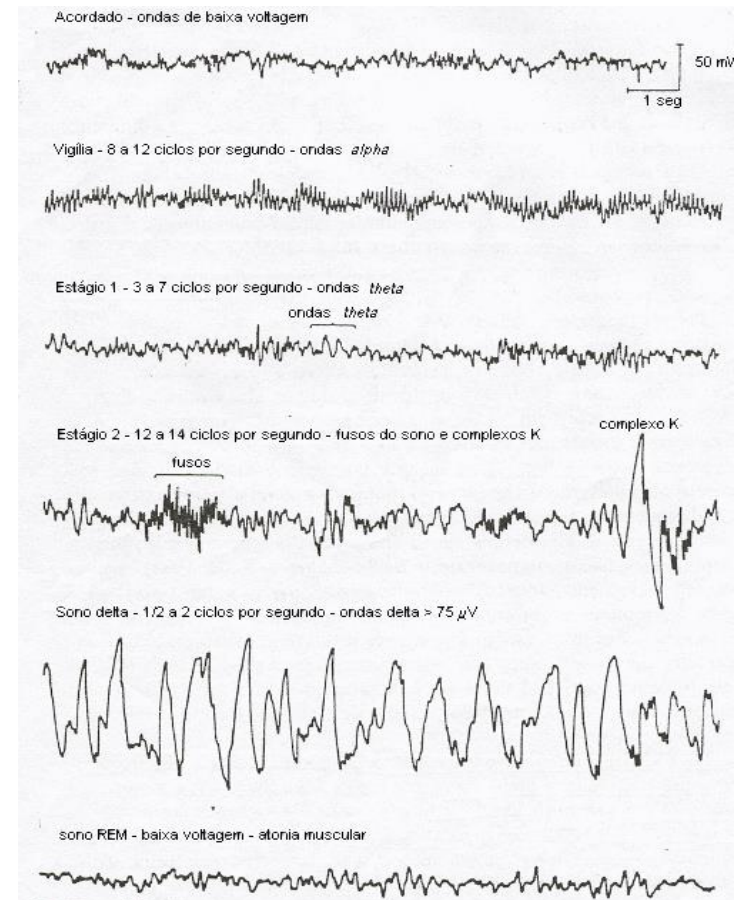
Ritmo cardíaco



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

Electroencefalograma (EEG)

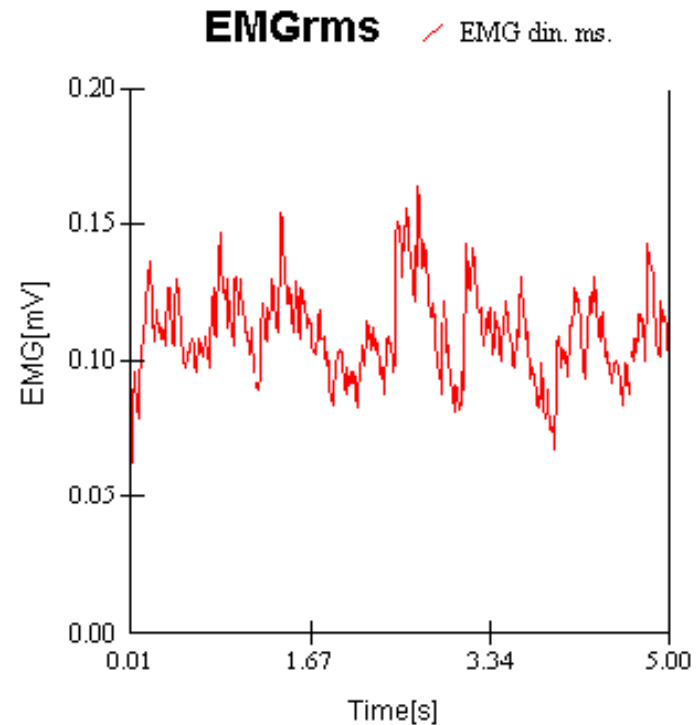
- Registo da actividade eléctrica do encéfalo



Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

Electromiografia (EMG)

- Registo da actividade eléctrica muscular



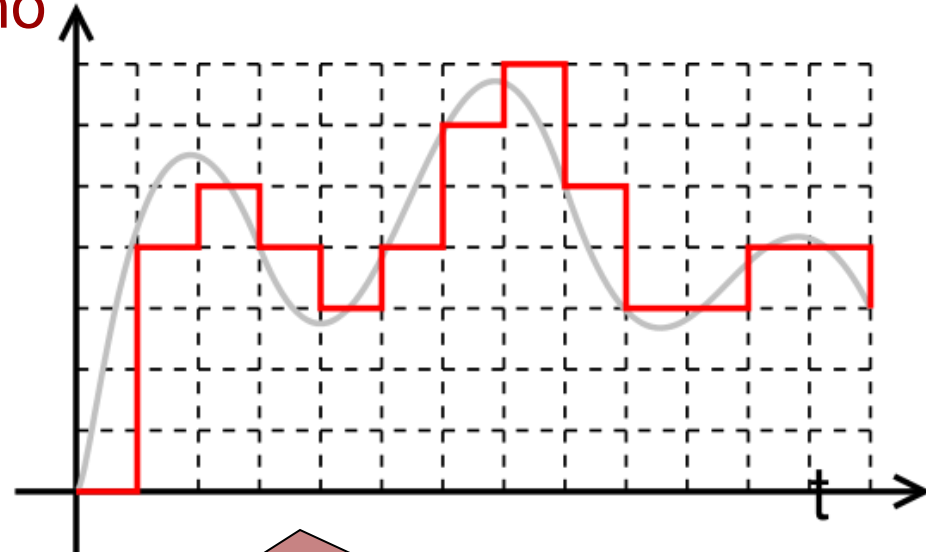
Slide criado por Fausto Fernandes, MIM, UP

Analógico vs Digital

1. Sinal biomédico
- 2. Analógico vs Digital**
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

Analógico vs. Digital

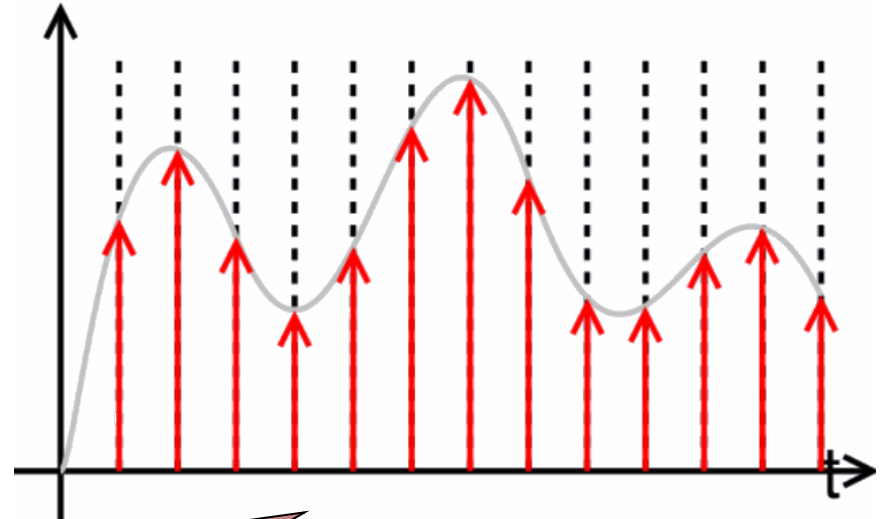
- Sinal analógico: Contínuo no tempo e na amplitude.
 - Som emitido pelas colunas do rádio
 - Imagem emitida pela televisão
 - Velocidade do meu automóvel
- Sinal digital: Discreto no tempo e na amplitude.
 - Amostragem
 - Quantização



A conversão analógica-digital implica perda de informação!

Amostragem

- Apenas um valor é recolhido num intervalo definido de tempo.
 - Cada valor corresponde a uma ‘amostra’.
- Frequência de amostragem
 - Número de amostras recolhidas por segundo

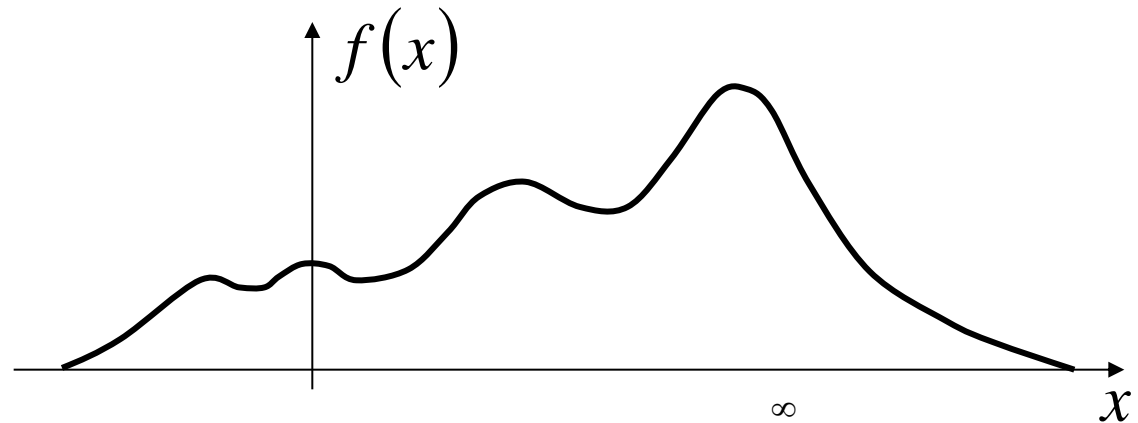


Frequência de Nyquist: A frequência máxima do sinal amostrado é igual a metade da frequência de amostragem

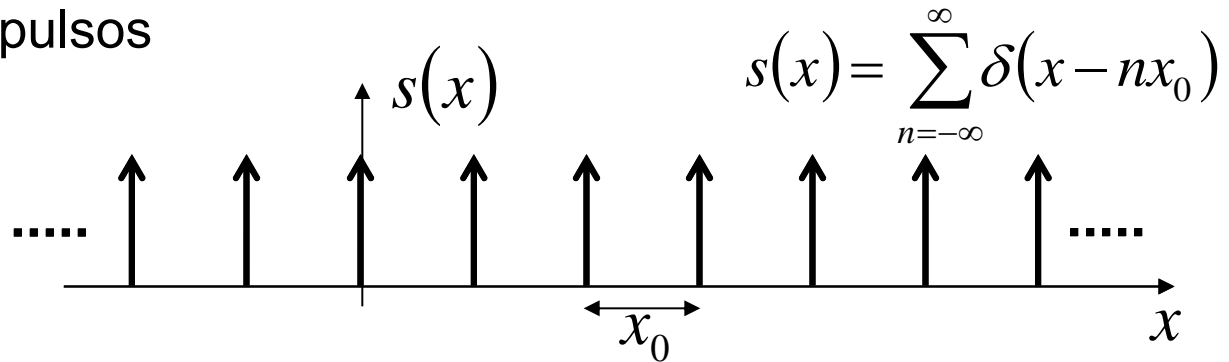


Teorema da Amostragem

Sinal contínuo



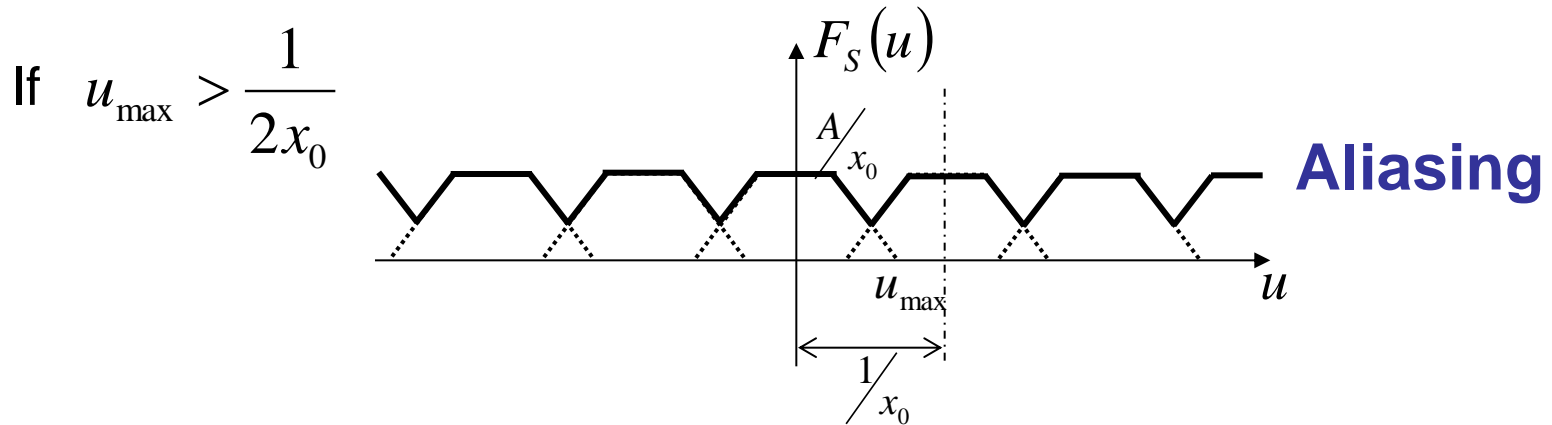
'Comboio' de impulsos



Função amostrada

$$f_s(x) = f(x)s(x) = f(x) \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x - nx_0)$$

Frequência de Nyquist



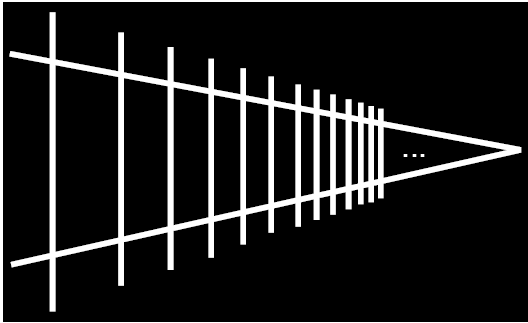
A frequência de amostragem deve ser $> 2u_{\max}$

O que é isto? Frequências do sinal?

Exemplo: Telefone

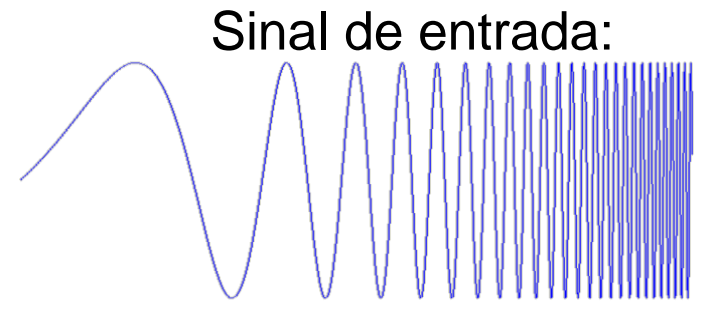
- A taxa de amostragem é de 8 kHz (8000 amostras/segundo).
- Frequência máxima de som?
 - Segundo Nyquist: $8\text{kHz}/2 = 4\text{ kHz}$
- Som
 - Frequências baixas: sons graves.
 - Frequências altas: sons agudos.
- E se eu tocar piano através do telefone?
 - Só consigo ouvir notas graves!

Aliasing

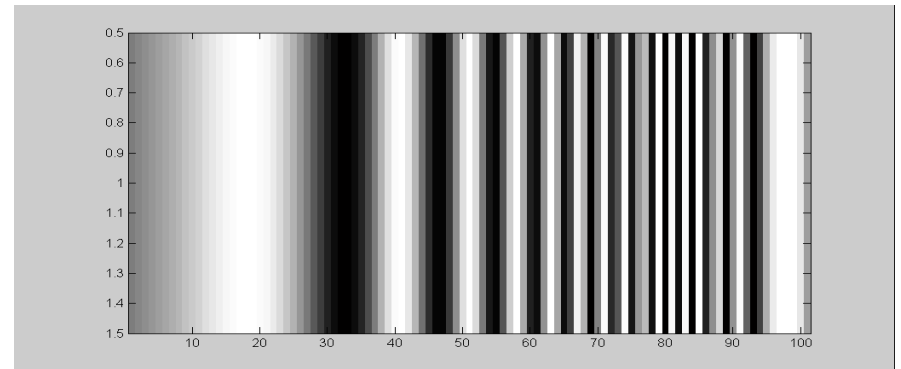


Uma vedação com efeito de perspectiva sofre 'aliasing'

Porquê?



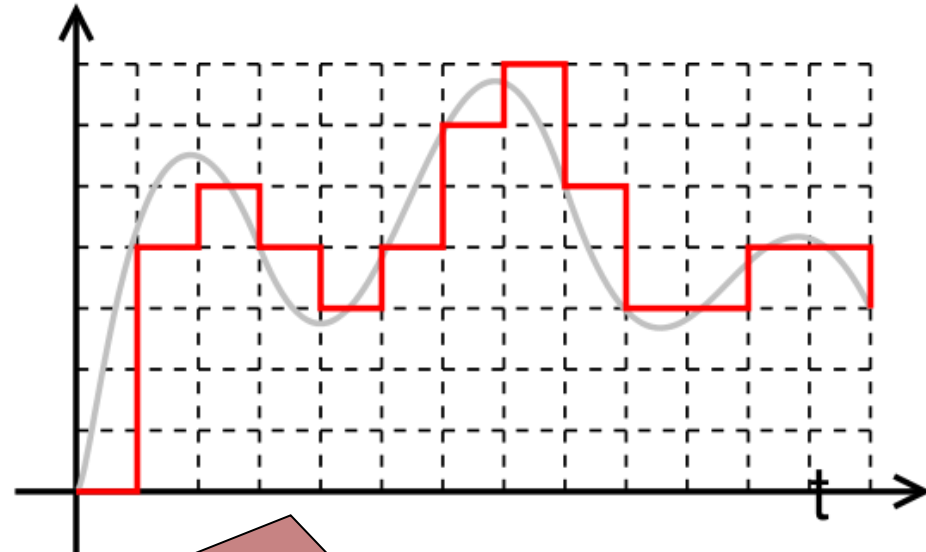
Saída com aliasing



`x = 0:.05:5; imagesc(sin((2.^x).*x))`

Quantização

- Amostras possuem um número finito de valores possíveis.
 - O valor analógico é arredondado para o valor válido mais próximo.
- Intervalo de quantização.
 - Diferença entre dois valores válidos.

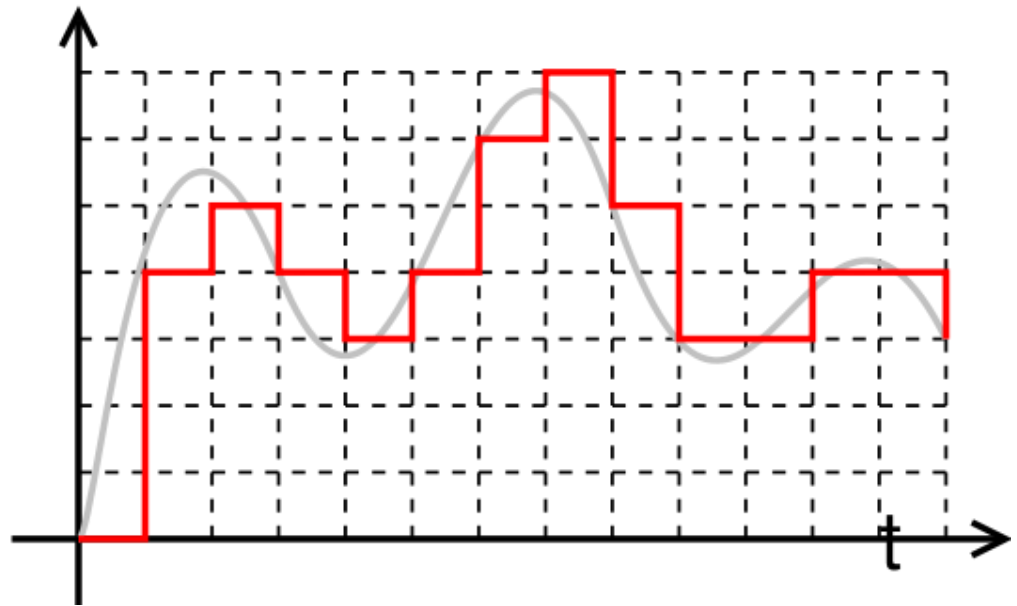


Quanto menor o intervalo de quantização, maior a precisão do sinal. *Problema:* Precisamos de mais memória para o armazenar!

Níveis de quantização

- G – número de níveis
- m – bits de armazenamento
- Aproxima-se cada valor ao valor quantizado mais próximo.

$$G = 2^m$$



Efeitos da quantização



Efeitos da quantização



Sinal Digital

- **Maior nível inicial de ruído (quantização, amostragem)**
 - Um CD novo tem pior qualidade de som do que um disco de vinil novo.
- **Melhor robustez ao ruído**
 - Um CD velho tem melhor qualidade de som do que um disco de vinil velho.
 - Uma cópia de um CD é exactamente igual ao CD original
 - Uma cópia de uma cassette tem mais ruído do que a cassette original.
- **Pode ser processado por um computador!**

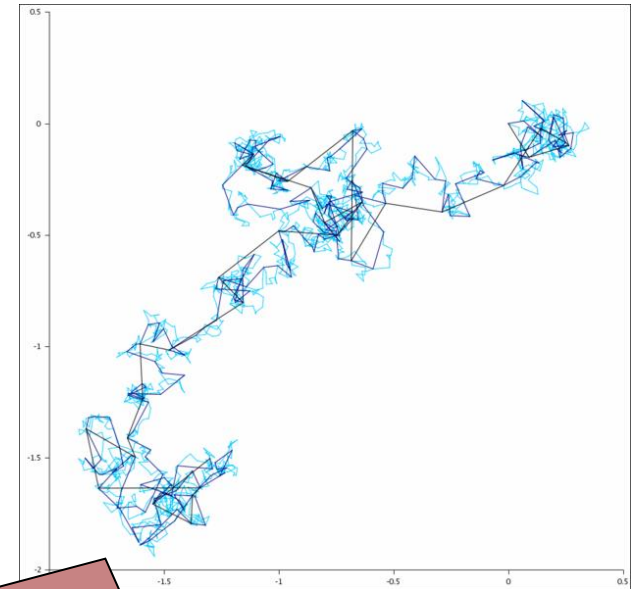
Demonstra-se matematicamente!

Ruído

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
- 4. Ruído**
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

O que é o Ruído?

- Define-se como qualquer degradação do sinal original.
- Todos os sistemas reais contêm ruído.
 - Ruído de medição.
 - Ruído de quantização / amostragem.
 - Ruído térmico.
 - ...



Todas as partículas microscópicas vibram a uma frequência relacionada com a sua temperatura. O ruído constante provocado por esta vibração chama-se **Ruído Térmico.**

A Relação Sinal/Ruído

- Quantifica a relação entre:
 - Potência do Sinal
 - Potência do Ruído
- Mede a influência que o ruído têm na degradação do sinal.

$$\text{SNR} = \frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} = \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)^2$$

$$\text{SNR(dB)} = 10 \log_{10} \left(\frac{P_{\text{signal}}}{P_{\text{noise}}} \right) = 20 \log_{10} \left(\frac{A_{\text{signal}}}{A_{\text{noise}}} \right)$$

Como as diferenças entre sinal e ruído podem ser consideráveis, tipicamente apresenta-se este valor em Decibéis.

Fontes de Ruído

- Diferentes sinais são afectados por diferentes fontes de ruído.
- Para processar um sinal, devo estudar que fontes de ruído são relevantes.
- Algumas fontes de ruído ‘universais’:
 - Ruído térmico.
 - Ruído de medição.
 - Ruído de quantização / amostragem.

Modelos de Ruído

- **Diferentes modelos de ruído:**
 - Gaussian, Rayleigh, Erlang, Exponential, etc.
- **Modelização típica:**
 - Função de degradação $h(x,y)$ que opera sobre o sinal $f(x,y)$ conjuntamente com um termo aditivo de ruído $n(x,y)$:

$$g(x,y) = h(x,y) * f(x,y) + n(x,y)$$

**Atenção:
Convolução!**

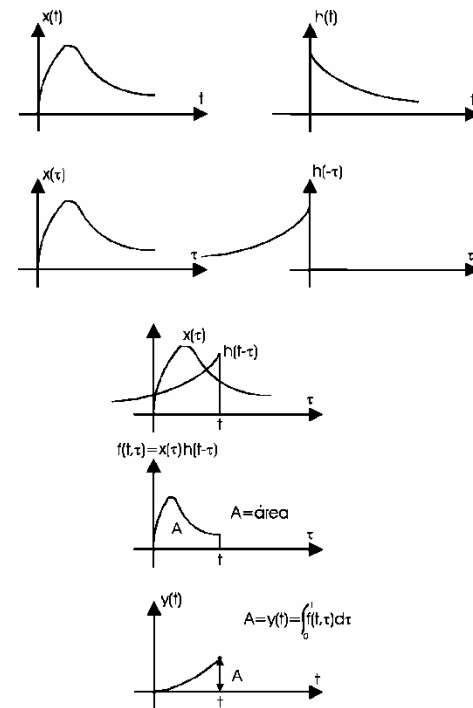
Convolução

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
- 5. Convolução**
6. Introdução à Transformada de Fourier

Convolução

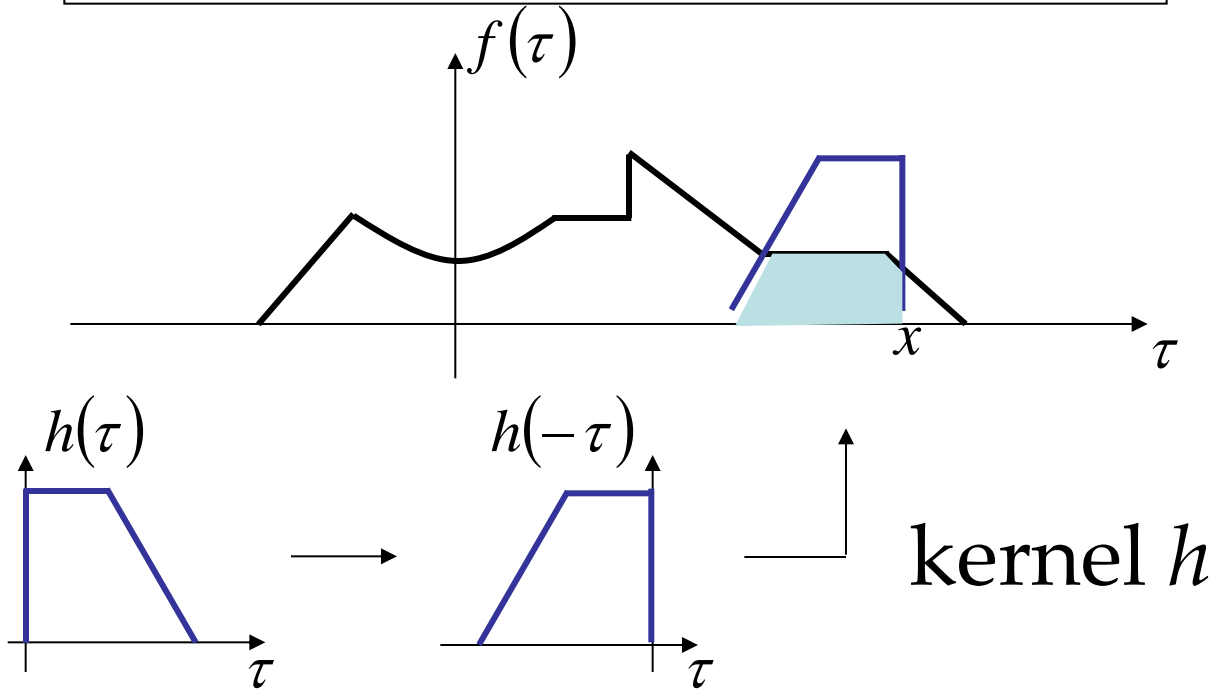
- **Operação matemática**
 - Pode ser vista como uma ‘média deslizante’ entre um sinal a manipular e um ‘sinal-máscara’.
- **Relação com Fourier**
 - Uma convolução de dois sinais corresponde a uma multiplicação no espaço das frequências.
- **Operação muito útil para processamento de sinais.**

$$(f * g)(t) = \int_a^b f(\tau)g(t - \tau) d\tau$$

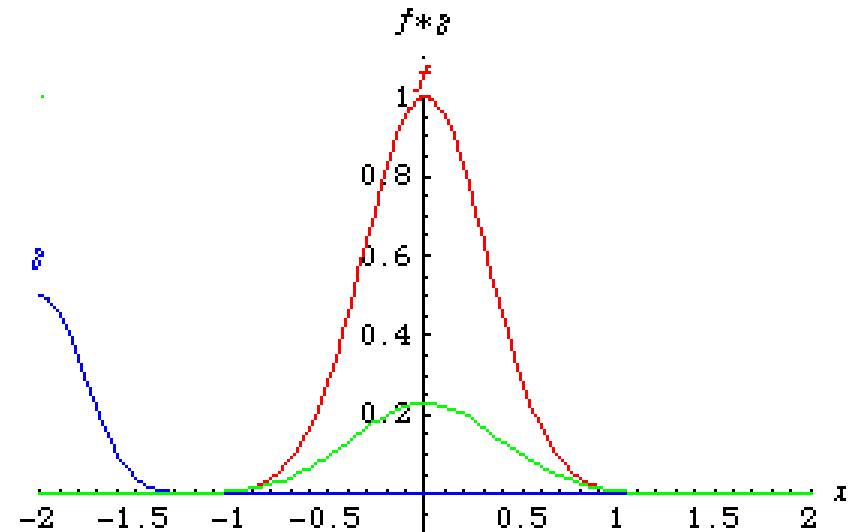
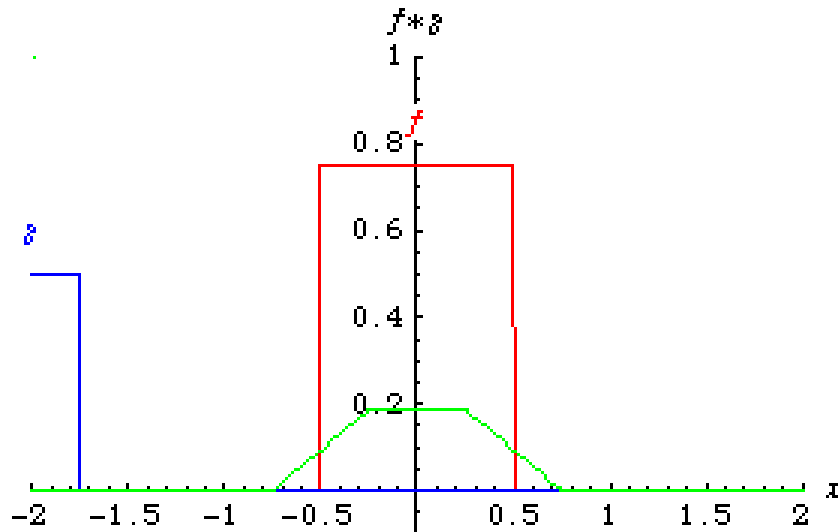


Convolução

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)h(x-\tau)d\tau \quad g = f * h$$



Exemplo



— f
— g
— $f * g$

Eric Weinstein's Math World

Propriedades da convolução

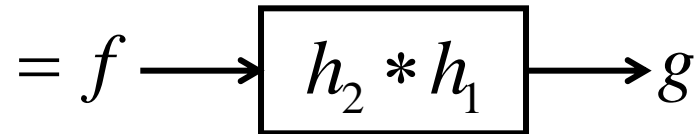
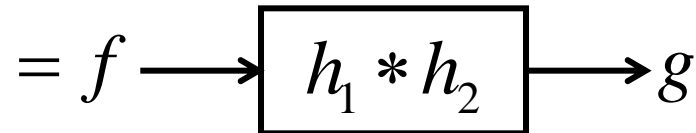
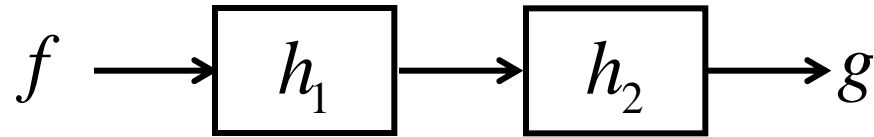
- Comutativa

$$a * b = b * a$$

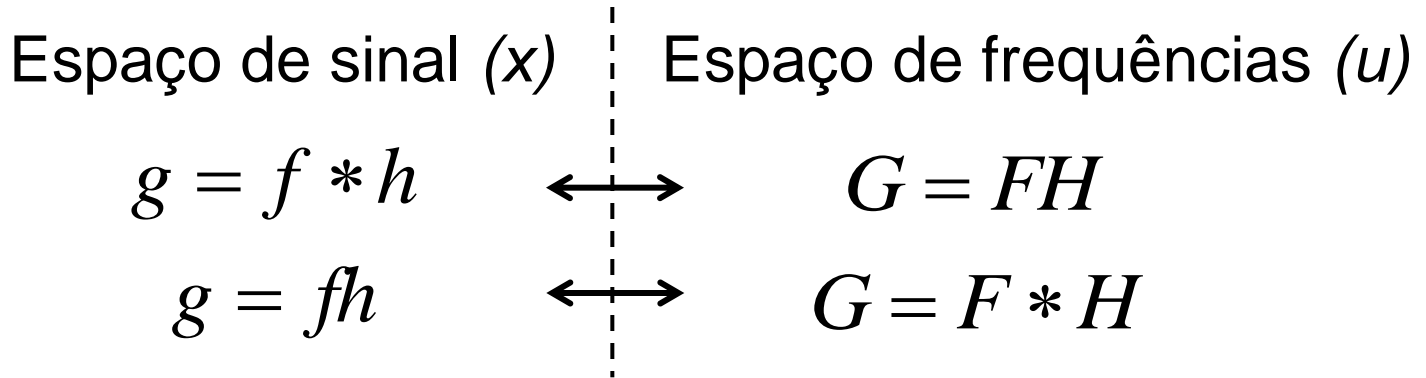
- Associativa

$$(a * b) * c = a * (b * c)$$

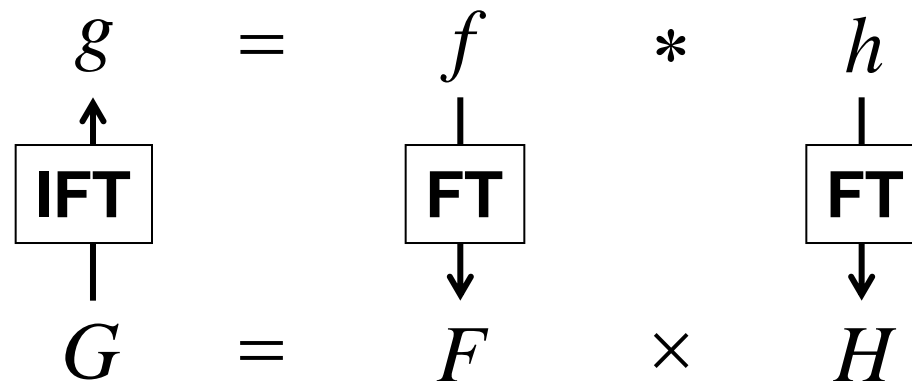
- Vantagem:
Sistemas em cascata!



Convolução e Transformada de Fourier



Vantagem: Calcular $f * g$ sem fazer convoluções



Introdução à Transformada de Fourier

1. Sinal biomédico
2. Analógico vs Digital
3. Quantização e amostragem
4. Ruído
5. Convolução
6. Introdução à Transformada de Fourier

Jean Baptiste Joseph Fourier (1768-1830)

- **Teve uma ideia louca (1807):**
 - **Qualquer** função periódica pode ser reescrita como uma soma ponderada de **senos** e **cosenos** de diferentes frequências.
- **Não te acreditas?**
 - Lagrange, Laplace, Poisson e outros também não.
 - Apenas foi traduzido para Inglês em 1878!
- **Mas é verdade!**
 - Chama-se a **Série de Fourier**
 - Possivelmente a ferramenta matemática mais útil em toda a engenharia!

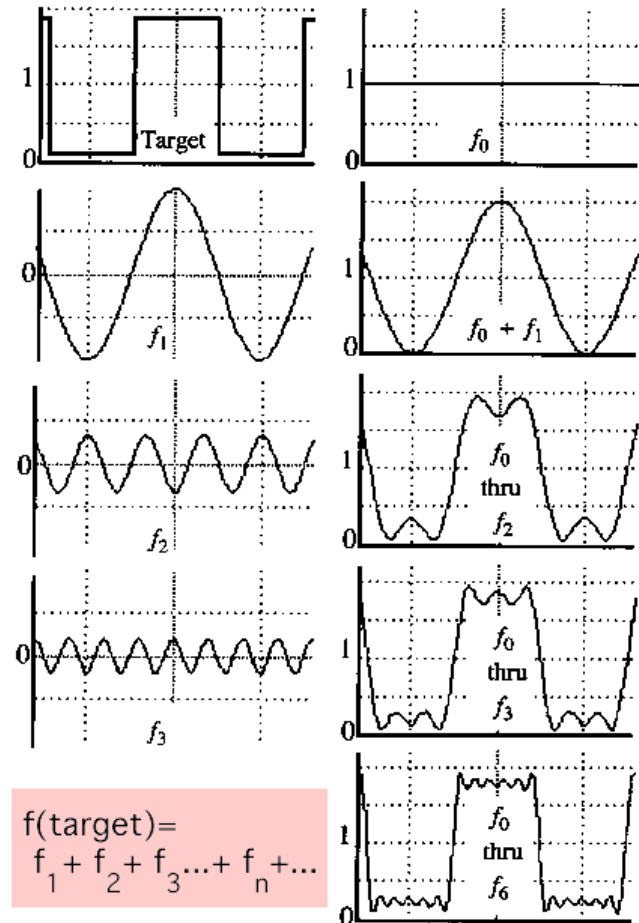


Soma de Senos

- A nosso 'tijolo':

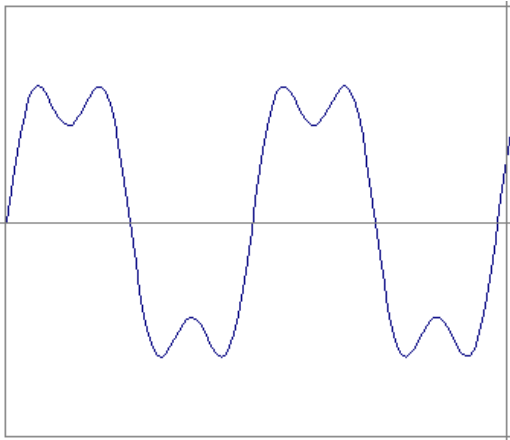
$$A \sin(\omega x + \phi)$$

- Soma-se um número suficiente destes para se obter qualquer sinal $f(x)$ que se queira!
- Quantos graus de liberdade?
- O que é que cada um controla?
- Quais guardam as características globais de um sinal? E as finas?



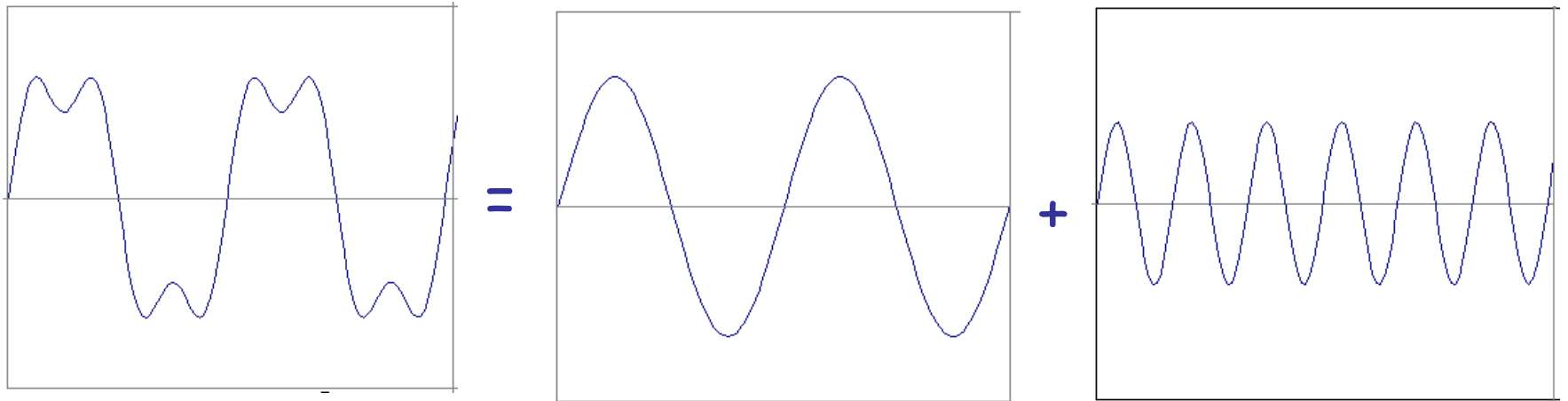
Tempo e Frequência

- Exemplo : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



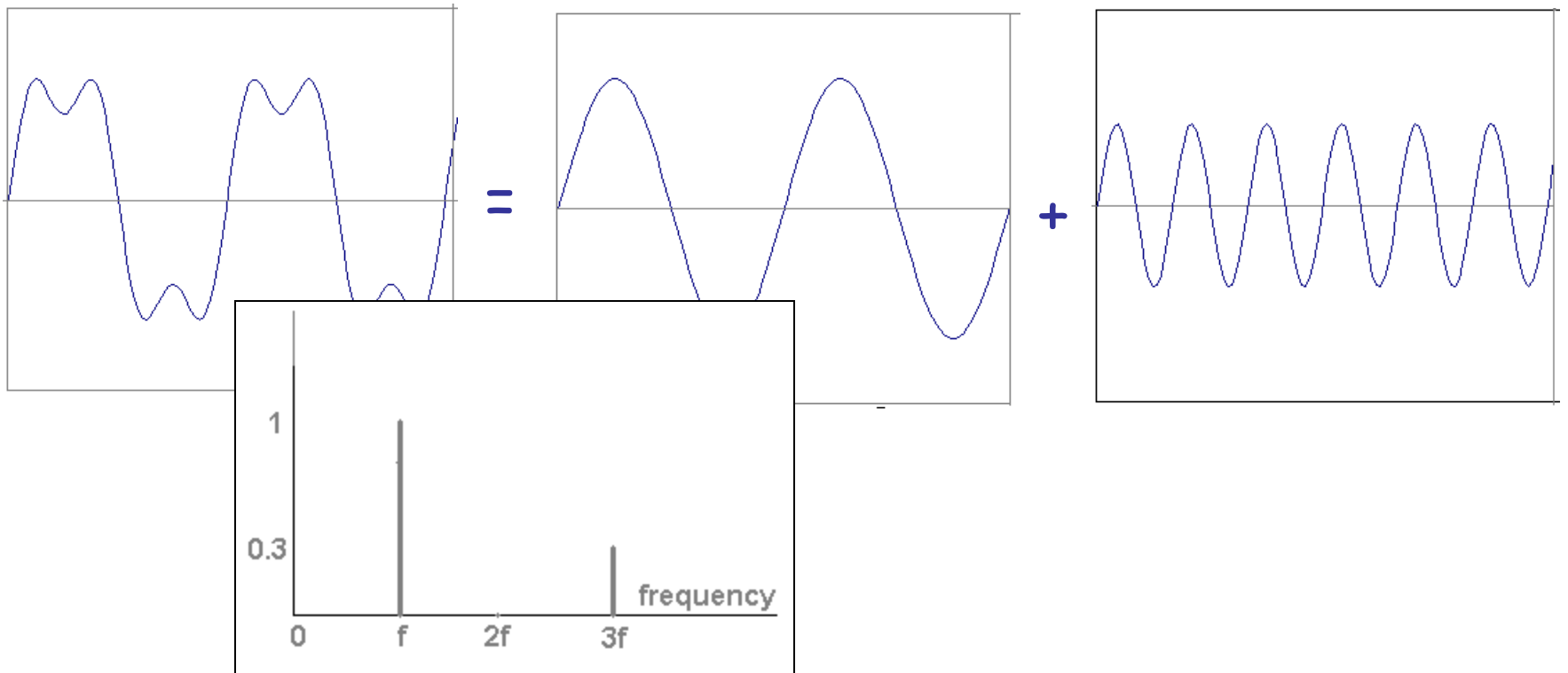
Tempo e Frequência

- Exemplo : $g(t) = \sin(2pf t) + (1/3)\sin(2p(3f) t)$

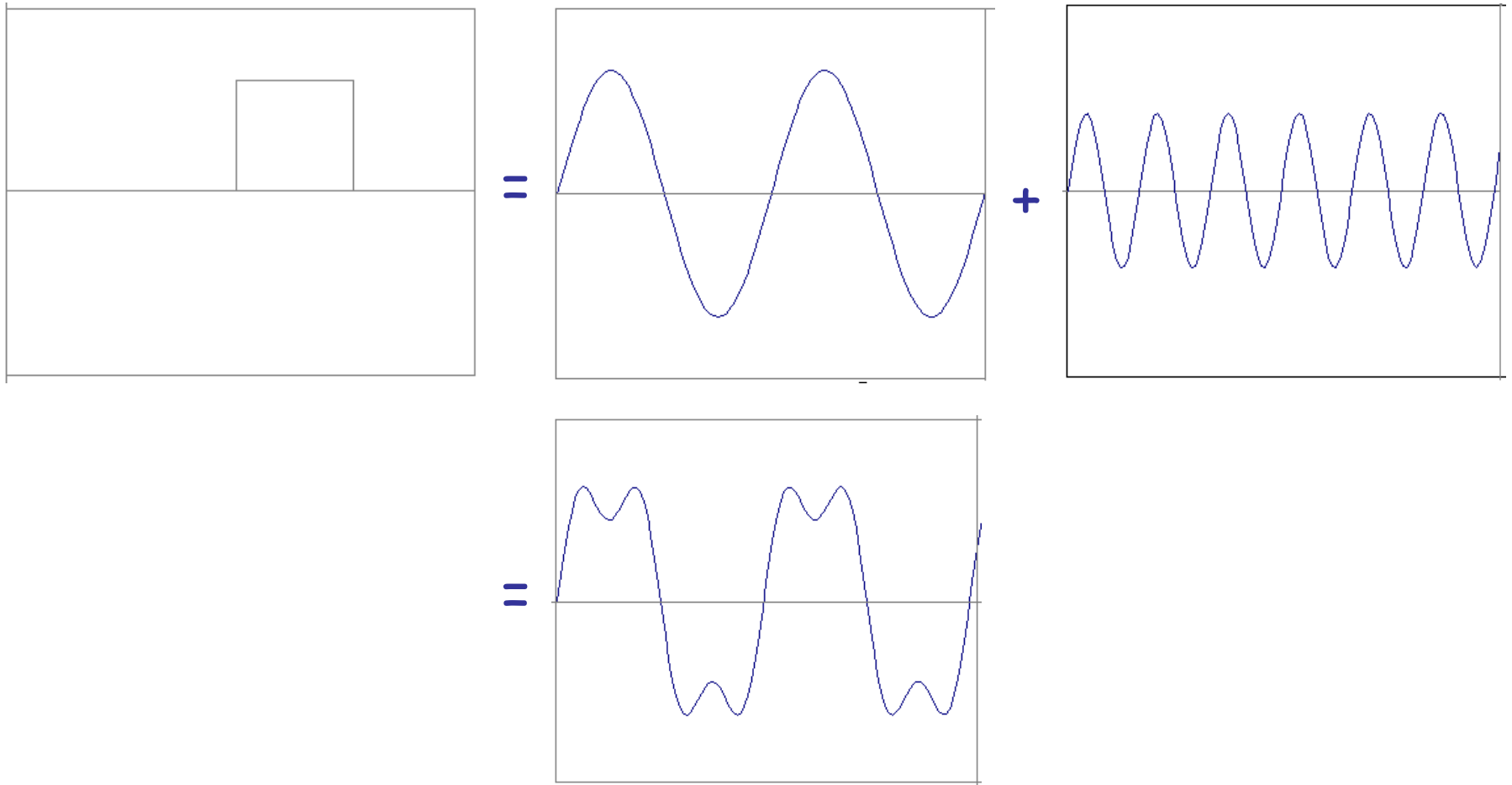


Espectro de frequências

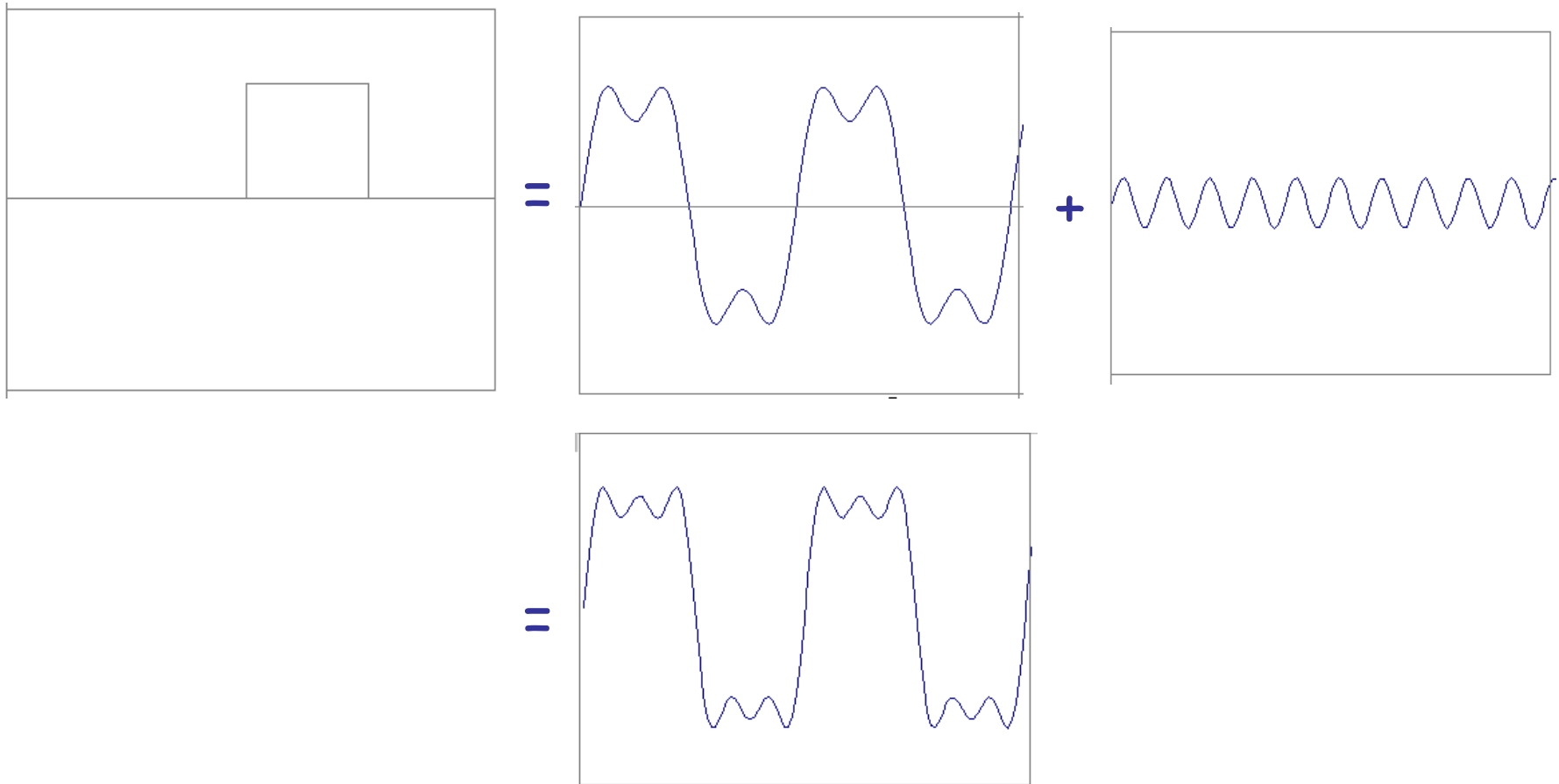
- Exemplo : $g(t) = \sin(2\pi f t) + (1/3)\sin(2\pi(3f) t)$



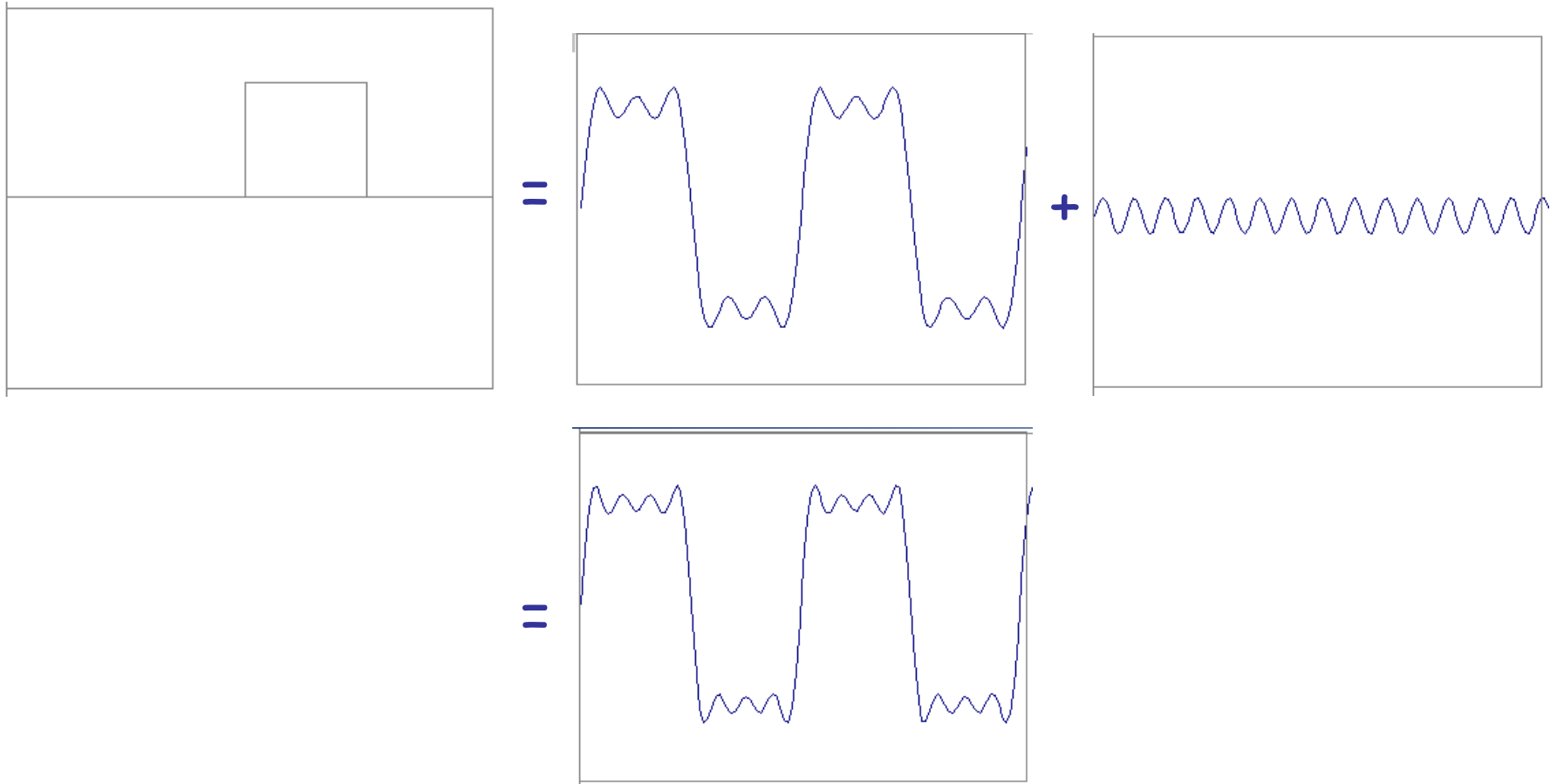
Espectro de frequências



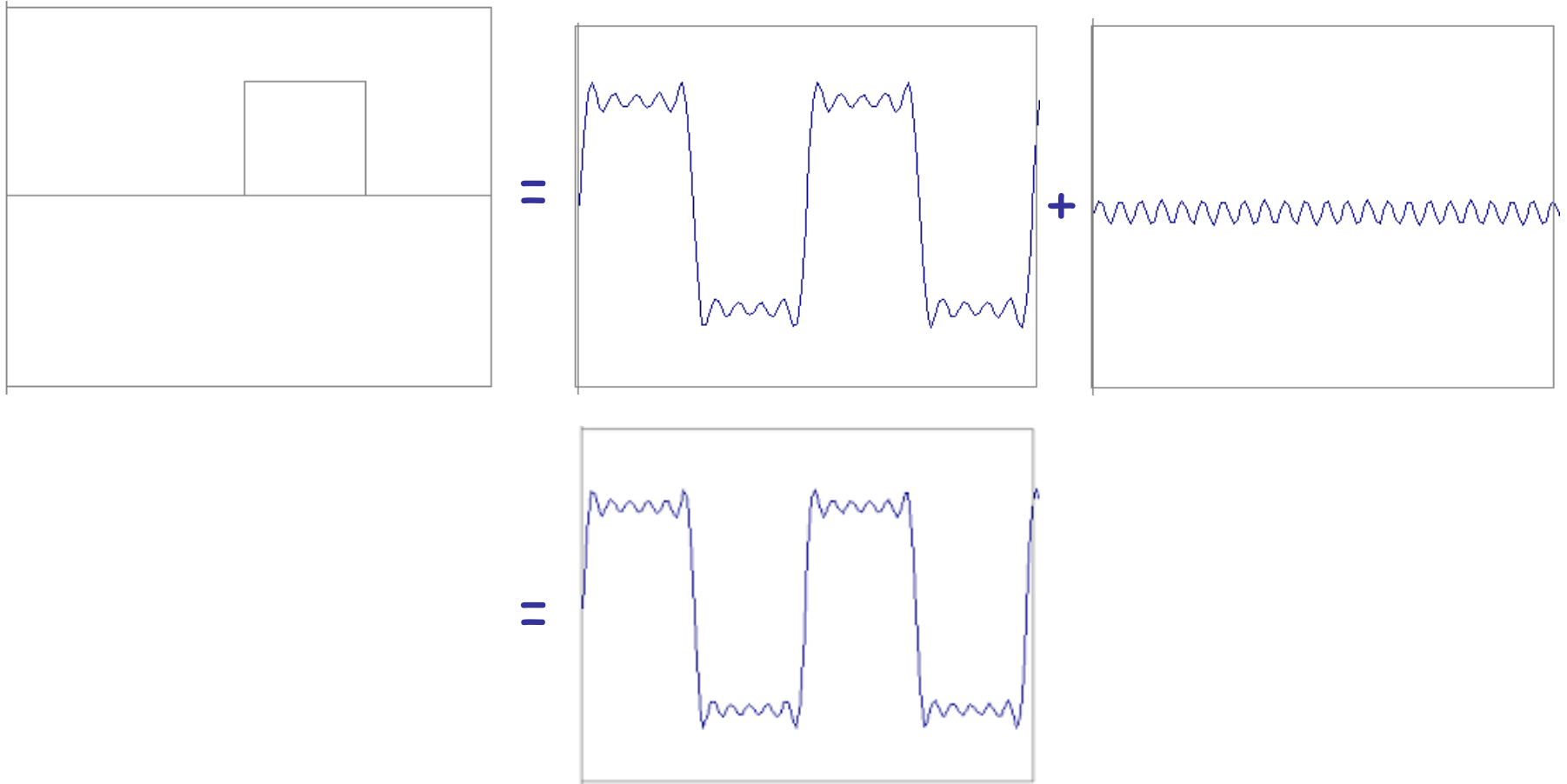
Espectro de frequências



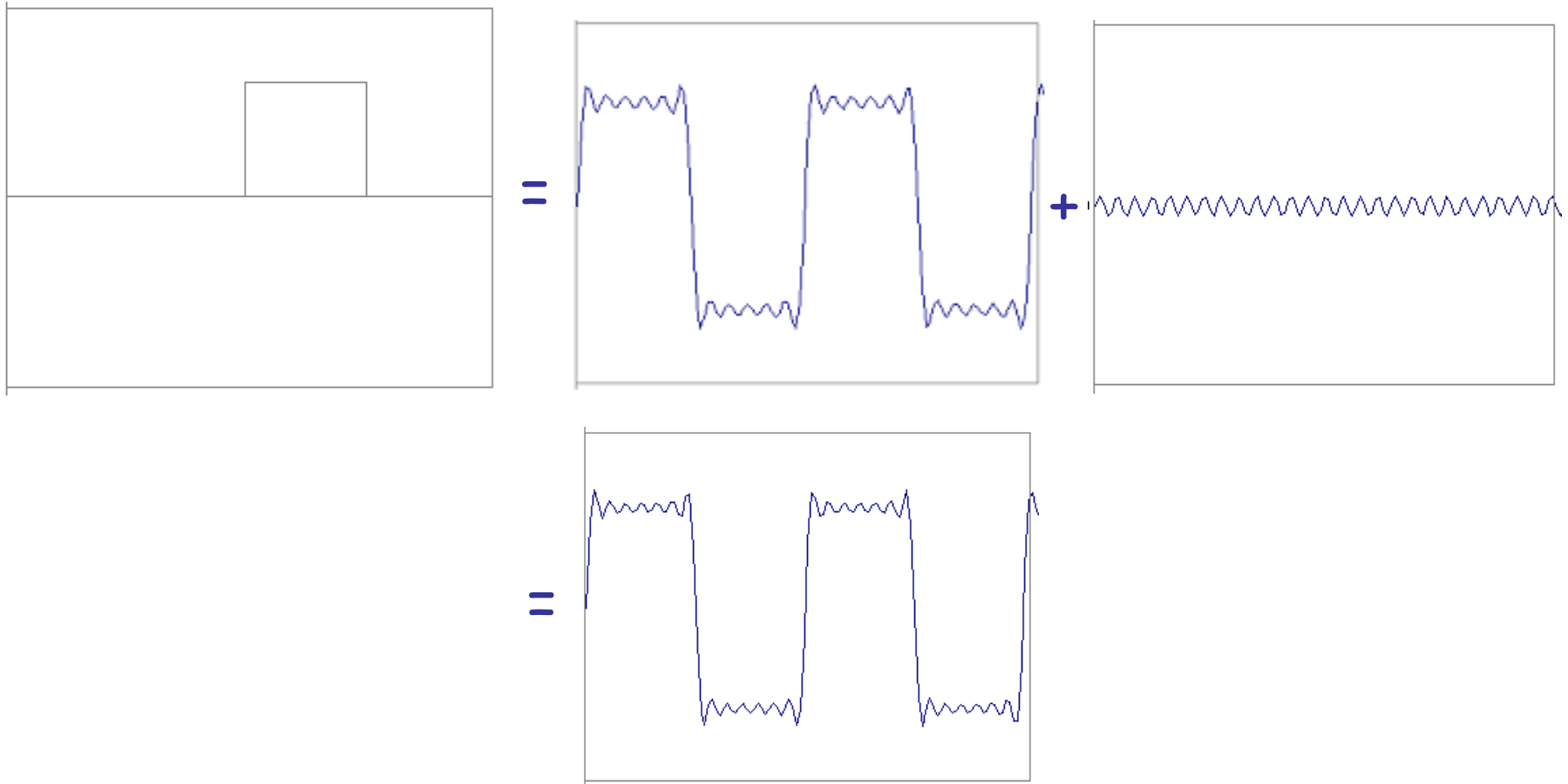
Espectro de frequências



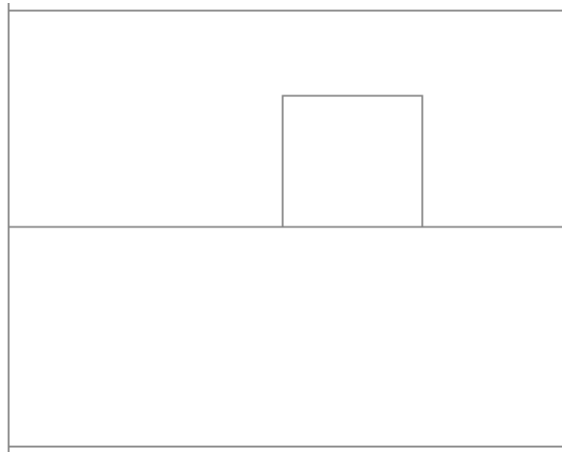
Espectro de frequências



Espectro de frequências

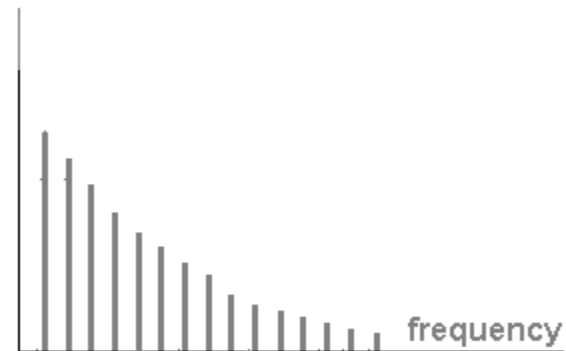


Espectro de frequências



=

$$A \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin(2\pi kt)$$



Transformada de Fourier

- Directa:

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-iux} dx$$

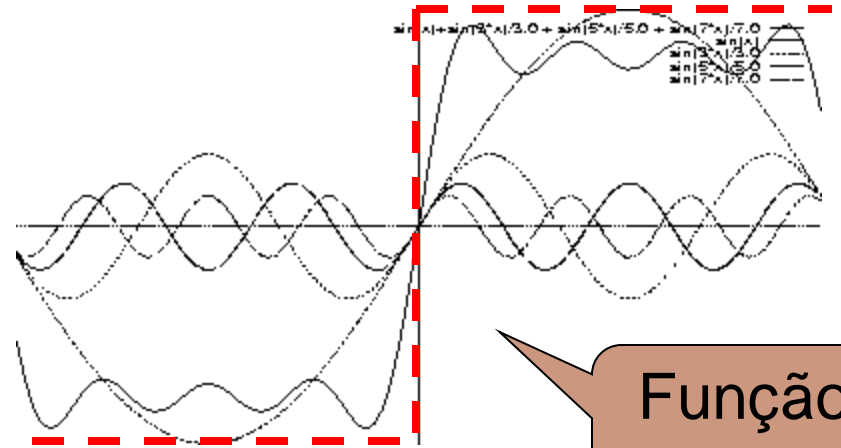
Note: $e^{ik} = \cos k + i \sin k$ $i = \sqrt{-1}$

- Inversa

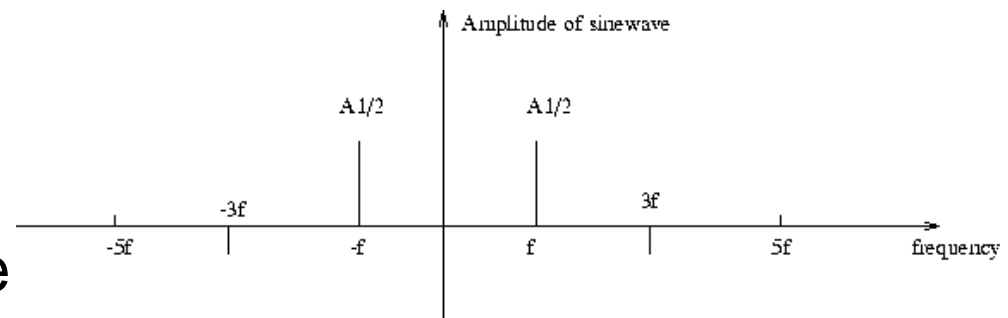
$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(u) e^{iux} dx$$

Transformada de Fourier

- Podemos decompor um sinal numa soma de senos e co-senos.
 - Amplitude
 - Frequência
 - Fase
- Quanto mais usarmos, melhor a reconstrução.
 - Perfeita: nr. infinito de senos e co-senos

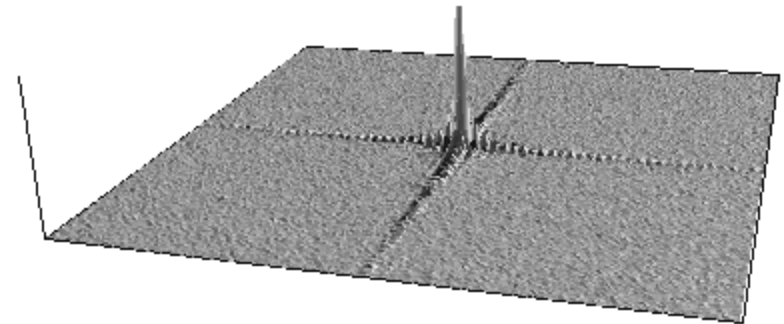
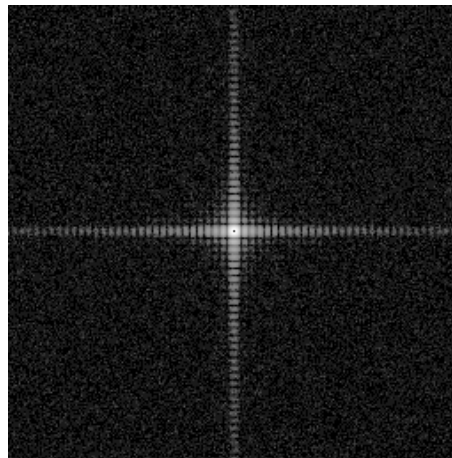
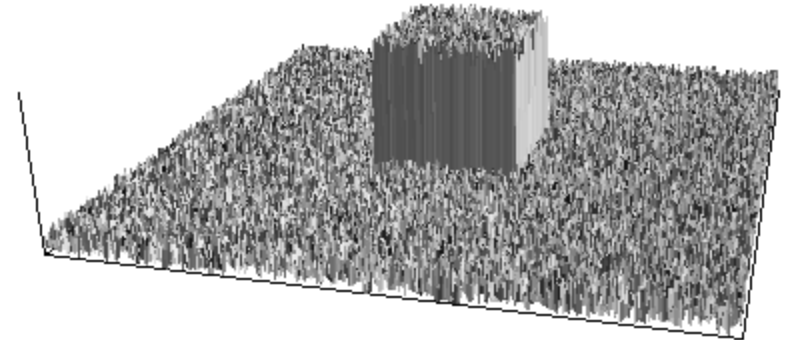
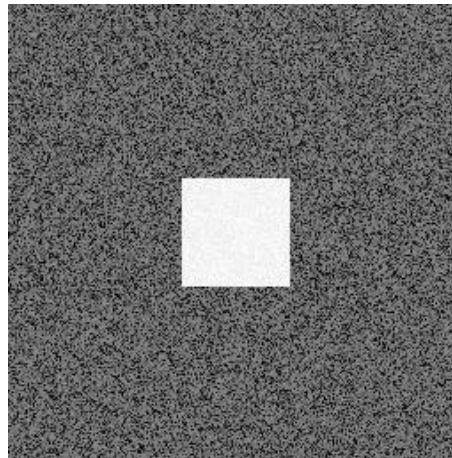


Função
'degrau'



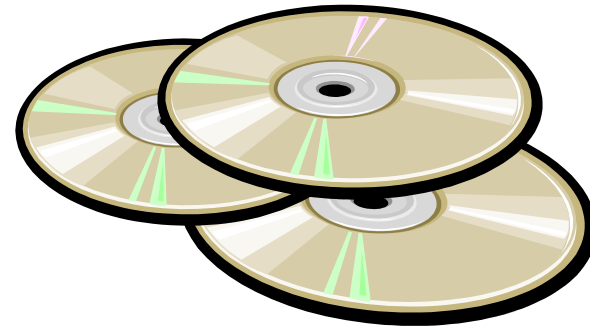
Relação Espaço - Frequência

- **Frequências espaciais:**
 - Baixas:
Áreas planas
 - Médias:
Áreas com textura dominante
 - Altas:
Fronteiras
- **Grande concentração de energia nas baixas frequências!**



Exemplos

- Um CD contém frequências Áudio até aos 22 kHz.
- Um telefone apenas contém frequências até aos 4 kHz.
- A voz é diferente!



Os sons agudos não são transmitidos!



Filtros de Frequência

- Posso manipular de forma diferente as várias frequências do sinal.

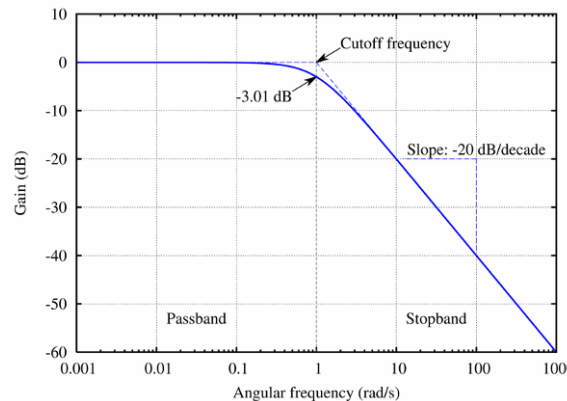
1. Introdução à Transformada de Fourier

– Filtros de Frequência

- Filtros típicos

- Passa-Alto
- Passa-Baixo
- Passa-Banda

Um equalizador de som é uma bateria de filtros de frequência.



Filtro Passa-Baixo