

Lógica Computacional

Nelma Moreira

Departamento de Ciência de Computadores da FCUP

Lógica Computacional
Aula 1

URL:

<http://www.dcc.fc.up.pt/nam/web/Teaching/LC2014/index.html>

Cursos: LCC, MIERSI e (como **Lógica e Programação** para LCB, LCM, LCF, ...)

Escolaridade: 2T e 2P

Obtenção de frequência: Serão propostos trabalhos práticos que serão apresentados nas aulas práticas. Para frequência será necessário obter 1.5 valores em 5 na totalidade dos trabalhos (previstos 5 trabalhos).

Método de avaliação

Trab trabalhos apresentados nas aulas práticas

Exame Exame final

Aprovação: $(Trab * 5 + Exame * 15) \geq 9.5$, $Trab * 5 \geq 1.5$,
 $Exame * 15 \geq 5$.

Estudantes trabalhadores: Exame para 20 valores .

Lógica

A distinção entre o raciocínio correcto e incorrecto é o principal problema que aborda a lógica.

Irving Copi

A lógica estuda a razão como ferramenta do conhecimento.

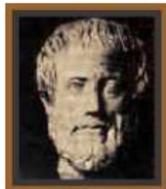
Jacques Maritain

A lógica é a ciência do pensamento correcto.

Raymond McCall

Breve História da Lógica (matemática)

Aristóteles (384-322 AC)



Criador da *Lógica formal* como uma ciência que estuda e classifica as formas de raciocínio (válidas ou não):

- noção de proposição (verdadeiras ou falsas)
- conjunção, disjunção, implicação e negação
- quantificadores
- silogismos

Breve História da Lógica (matemática)

Exemplo: *modus ponens* de $A \rightarrow B$ e de A inferir B

Todos os homens são mortais

Sócrates é homem

Logo Sócrates é mortal

Breve História da Lógica (matemática)

Gottfried Leibniz (1646-1716)



Ideia maravilhosa:

...Um alfabeto cujos elementos representam não sons, mas conceitos. Uma linguagem baseada nesse alfabeto permitiria determinar por calculos simbólicos quais as frases da linguagem que são verdadeiras e quais as relações lógicas que existem entre elas.

Iniciou a sistematização dum **calculus rationcinator**...mas o seu “Patrono” referia que ele fizesse árvores geneológicas..

Breve História da Lógica (matemática)

George Boole (1815-1846)



Fundador da lógica matemática. Sistematizou a lógica proposicional como uma álgebra.

- $(\{0, 1\} \cup S, \vee, \wedge)$ é uma álgebra com os axiomas: comutatividade de \vee e \wedge ; 0 e 1 identidades; distributividade; inversos
- Outras propriedades são teoremas (i.e podem ser demonstradas a partir dos axiomas): associatividade, elementos absorventes, idempotência, leis de De Morgan, etc...

Breve História da Lógica (matemática)

Gottlob Frege (1880)



Criador da Lógica de predicados (de primeira ordem): *notação simbólica para formalizar as demonstrações da matemática*

Axiomas lógicos e um sistema formal (p.e conjuntos, números naturais, reais, etc).

Pretendia reduzir a matemática à lógica: **Logicismo**.

Breve História da Lógica (matemática)

Peano (1888)



Axiomatização dos números naturais.

Axiomas de Peano para a aritmética

Os axiomas são factos básicos dos números naturais:

1 $\forall x(x + 1 \neq 0)$

2 $\forall x \forall y(x + 1 = y + 1 \rightarrow x = y)$

3 $0 + 1 = 1$

4 $\forall x x + 0 = x$

5 $\forall x \forall y x + (y + 1) = (x + y) + 1$

6 $\forall x x \times 0 = 0$

7 $\forall x \forall y x \times (y + 1) = (x \times y) + x$

8 (princípio da indução) $(Q(0) \wedge (\forall x(Q(x) \rightarrow Q(x + 1))) \rightarrow \forall x Q(x)$

Breve História da Lógica (matemática)

Russell (1901)



Russell encontra um paradoxo (*contradição*) nos axiomas de Frege para a teoria dos conjuntos:

Seja Z o conjunto de todos os conjuntos que não pertencem a si próprios. Será que $Z \in Z$?

Solução:

Considerar hierarquia de tipos de conjuntos. Juntamente com **Whitehead** escreve os *Principia Matemática*, onde se pretende que todos os teoremas da matemática se podem deduzir de princípios puramente lógicos.

David Hilbert (1900)



Pretende que todas as demonstrações matemáticas se podem mecanizar (automatizar) usando sistemas dedutivos lógicos (de primeira ordem).

Isto para verificar a *Consistência* das axiomatizações:

De um conjunto de axiomas garantir que não se deduz proposições contraditórias.

Normalmente bastaria mostrar que têm um modelo...mas como garantir que o modelo é *verdadeiro/existe* se for infinito...

Axiomatização de Grupos

- 1 $\forall x \forall y \forall z (x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$
- 2 $\forall x (x \circ 1) = x$
- 3 $\forall x \exists y (x \circ y) = 1$

Postulados de Euclides

- 1 Uma linha recta pode ser desenhada entre quaisquer dois pontos.
- 2 Qualquer segmento de recta pode ser estendido indefinidamente a uma linha recta
- 3 Dado qualquer segmento de recta, um círculo pode ser desenhado tendo segmento como raio e um dos seus pontos extremos como centro
- 4 Todos os ângulos são congruentes
- 5 Dado uma linha recta e um ponto exterior existe uma recta que passa por esse ponto e é paralela à primeira

K. Gödel (1930)



Mostra os **limites dos sistemas dedutivos formais**: um sistema que contenha os axiomas de Peano admite proposições válidas que não são demonstráveis no sistema.

Church (1936)



Tese de Church-Turing: todas as funções computáveis são-no por uma máquina de Turing ($=\lambda$ definíveis)

Turing (1936)



Limites da computação: existem funções que não são computáveis por uma máquina de Turing (Problema da paragem).

Church e Turing (1936)

A lógica de predicados não é decidível.

Ver <http://www.sandiego.edu/LogicSlave/fmslog.html>

Ver <http://www.logicomix.com/en/>

O que é a lógica matemática?

Boole \rightarrow Frege \rightarrow ... \rightarrow Hilbert \rightarrow Gödel \rightarrow ...

Formalizações simbólicas essencialmente associadas com problemas dos fundamentos da matemática...

- teoria de modelos
- teoria da dedução (ou demonstração)
- sistemas axiomáticos (p.e., teoria dos conjuntos)

Lógicas há muitas...

- Lógica clássica: proposicional e de predicados (primeira ordem)
- Lógicas de ordem superior
- Lógicas subestruturais (p.e intuicionista): modificação das propriedades das conectivas lógicas. Ex: $\neg\neg A \not\equiv A$;
 $A \wedge A \not\equiv A$
- Lógicas modais: necessidade, conhecimento, temporais, descrições, etc. A noção de verdade é parametrizada...Exemplo: *Hoje é segunda-feira*
- ...

O que é “uma lógica”?

- uma linguagem de um alfabeto em que se define o que são **fórmulas** e outros objectos.
- Uma maneira de definir uma semântica (=noção do que é verdadeiro) para as fórmulas. Uma mesma lógica pode ter várias semânticas...
- Um sistema de dedução que, usando um número finito de regras permita a obtenção de fórmulas a partir de outras (=raciocínio). Deve ser íntegro: o que se deduz deve ser verdadeiro...Mas também será bom que o que é verdadeiro deve ser deduzível (completo)...Mas isto nem sempre é possível.

Lógica e Ciência de Computadores

Circuitos lógicos: lógicas Booleanas

Bases de dados: lógicas em modelos finitos (SQL=FO)

Inteligência artificial: sistemas periciais, linguagem natural, web semântica, etc.

Autômatos Finitos: lógica de segunda ordem monádica com um sucessor (os modelos são conjuntos de palavras)

XML: Um documento estruturado é uma árvore de uma linguagem representada por autômatos de árvores a que correspondem fórmulas duma lógica de segunda ordem...

Algoritmos e complexidade: classes de complexidade de problemas podem ser caracterizadas por classes de fórmulas lógicas

Linguagens de programação:

- programação em lógica (p.e prolog)
- teoria de tipos (sistemas tipos= sistemas dedutivos) aplicadas a linguagens funcionais

Especificação formal e verificação:

- verificação de hardware (circuitos)
- testes de correção de software: lógicas de programas (dinâmicas,temporais, etc)
- protocolos de segurança
- sistemas multi-agentes

Demonstração automática Demonstradores para teorias específicas
SAT/SMT solvers

Assistentes de demonstração de teoremas Demonstradores de teoremas assistidos
Extracção de programas a partir de especificações

- Isabelle
- Coq
- ...

Ver On the unusual effectiveness of logic in Computer Science,
Halpern. J. et al., *The bulletin of Symbolic Logic*, vol 7, n. 2, June
2001 (<http://www.math.ucla.edu/asl/bsltoc.htm>)

Objectivos

Introdução à lógica matemática numa perspectiva computacional.

- noções básicas do raciocínio lógico e utilização correcta dos sistemas dedutivos
- Relação entre semântica e sistemas dedutivos: integridade e completude (o que é válido é deduzível; o que é deduzível é válido)...
- Lógica proposicional e Lógica de primeira ordem
- Axiomatizações

Bibliografia

Apontamentos Serão fornecidos ao longo do curso...

Livros recomendados [BA01] [AFPMdS11] (Cap. 3 e 4)

[HR00](Cap 1. e 2.)

[BE00]



José Bacelar Almeida, Maria João Frade, Jorge Sousa Pinto,
and Simão Melo de Sousa.

*Rigorous Software Development: An Introduction to Program
Verification.*

Springer, 2011.



Mordechai Ben-Ari.

Mathematical Logic for Computer Science.

SV, 2nd edition, 2001.



Jon Barwise and John Etchmendy.

Language, Proof, and Logic.

CSLI, 2000.



Michael Huth and Mark Ryan.

*Logic in Computer Science: Modelling and reasoning about
systems.*

CUP, 2000.

430 DCCBIB.