Lógica Computacional (CC2003) Lógica e Programação (CC216)

Nelma Moreira

Lógica Computacional 24

Conteúdo

1 Introdução à Programação em Lógica

2 Unificação

Problema

Como estender a regra da resolução a cláusulas não fechadas?

Exemplo 24.1. *Aplicar regra da resolução a*

$$\{p(f(x), g(y)), q(x, y)\}$$

e

$$\{\neg p(f(f(a)), g(z)), q(f(a), g(z))\}$$

Solução: procurar uma substituição σ de variáveis que torne dois literais complementares: p.e $p(f(x), g(y))\sigma = p(f(f(a)), g(z))\sigma$.

Geralmente, $l_1\sigma = l_2\sigma$ e $l_1 \in C$ e $\neg l_2 \in C'$.

2.1 Substituições

Substituições

Uma substituição é uma função $\sigma : \mathcal{V}ar \longrightarrow \mathcal{T}$ tal que o conjunto dos $x_i \in \mathcal{V}ar$ com $\sigma(x_i) = t_i \neq x_i$ é finito. E escreve-se

$$\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$$

A substituição identidade é a substituição ι tal que $\iota(x) = x$, para todo o $x \in \mathcal{V}ar$.

Uma substituição $[t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ é fechada se todos os t_i são termos fechados.

$[f(a)/x, b/y, g(b, b)/z]$ é fechada, mas não $[f(y)/x, x/y, a/z]$

Instâncias

Uma expressão E um termo, um literal, uma conjunção ou uma disjunção de literais.

Uma expressão simples é um termo ou um átomo.

Seja $\sigma = [t_1/x_1, \ldots, t_n/x_n]$ e E uma expressão,

$E\sigma$(ou $\sigma(E)$), uma instância de E é a expressão que resulta de E substituindo simultaneamente todas as ocorrências de $x_1, \ldots, x_n$ por $t_1, \ldots, t_n$.

$E\sigma$ é uma instância fechada se não contiver variáveis.

Instâncias

$E = P(x, y, f(a))$ e $\sigma = [b/x, x/y]$, $E\sigma$ é

$$P(b, x, f(a))$$

$E = f(x, g(y, z), z)$ e $\sigma = [g(y, z)/x, a/z, z/y, f(f(b))/u]$,

$E\sigma$ é

$$f(g(y, z), g(z, a), a)$$

$E = P(f(x), x)$ e $\sigma = [a/y]$, $E\sigma$ é

$$P(f(x), x)$$

Se $S = \{E_1, \ldots, E_m\}$, é um conjunto finito de expressões E_i, e σ uma substituição,

então $S\sigma = \{E_1\sigma, \ldots, E_m\sigma\}$

Composição de substituições

Sejam $\theta = [s_1/x_1, \ldots, s_n/x_n]$ e $\sigma = [t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n]$ duas substituições, a substituição composta $\theta\sigma : \mathcal{V}ar \longrightarrow \mathcal{T}$, $\theta\sigma(x) = \theta(\sigma(x)) = (x\sigma)\theta$ é obtida de

$$[s_1\sigma/x_1, \ldots, s_n\sigma/x_n, t_1/y_1, \ldots, t_n/y_n]$$

retirando os $s_i\sigma = x_i$ e todos t_j/y_j tal que $y_j \in \{x_1, \ldots, x_n\}$.

$\theta = [f(z)/x, a/y, y/z]$ e $\sigma = [a/x, z/y, b/z, d/u]$,

$$\theta\sigma = [f(b)/x, a/y, d/u]$$

$\theta = [c/x, f(z)/y, u/v]$ e $\sigma = [v/u, x/z]$,

$$\theta\sigma = [c/x, f(x)/y, v/u, x/z]$$

Proposição 24.1. *Sendo θ, σ e γ substituições e E uma expressão tem-se que:*

1. $\theta\iota = \iota\theta = \theta$
2. $E(\theta\sigma) = (E\theta)\sigma$
3. $(\theta\sigma)\gamma = \theta(\sigma\gamma)$

Uma substituição σ é idempotente se $\sigma\sigma = \sigma$.

Renomeção de variáveis

Dada uma expressão E, seja V o conjunto das variáveis que ocorrem em E.

Uma substituição $\theta = [y_1/x_1, \ldots, y_n/x_n]$ é uma renomeação de variáveis (ou mudança de nome) para E se:

- o conjunto $\{x_1, \ldots, x_n\}$ está contido em V
- todos y_i são distintos
- $(V \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}) \cap \{y_1, \ldots, y_n\} = \emptyset$.

Variantes

Duas expressões E e F são variantes se existirem substituições σ e τ tais que $E = F\sigma$ e $F = E\tau$.

$P(f(x, y), g(z), a)$ é uma variante de $P(f(y, x), g(u), a)$

$P(x, x)$ não é uma variante de $P(x, y)$

Proposição 24.2. *Sejam E e F duas variantes. Então existem substituições θ e σ tais que $E = F\theta$ e $F = E\sigma$ e θ e σ são renomeações de variáveis, respectivamente para F e E.*

2.2 Unificadores

Unificadores

Seja S um conjunto finito de expressões simples.

Um unificador de S é uma substituição θ tal que $S\theta$ tem exactamente um elemento. E diz-se que S é unificável.

Um unificador θ de S é um unificador mais geral (*umg*) de S, se para qualquer unificador σ de S existir uma substituição γ tal que $\sigma = \theta\gamma$.

$\{P(f(x), z), P(y, a)\}$ é unificável:

$$\sigma = [f(a)/y, a/x, a/z]$$

é um unificador e

$$\theta = [f(x)/y, a/z]$$

é um unificador mais geral. E $\sigma = \theta[a/x]$.

Unificadores

$\{P(y, g(u, z)), P(x, x)\}$ é unificável:

$$[g(u, z)/y, g(u, z)/x]$$

é um unificador mais geral

$\{P(f(x), a), P(y, f(w))\}$ não é unificável: pois a e $f(w)$ não são unificáveis.

Se θ e σ forem dois *umg*s de S os elementos de $S\theta$ e $S\sigma$ são variantes (porquê?).

Então, pela Proposição 24.2, os *umg*s de S são únicos a menos de renomeação de variáveis.

Conjunto de diferenças

O conjunto de diferenças de um conjunto finito S de expressões simples, é dado por: localizar a posição mais à esquerda, na qual nem todas as expressões de S têm o mesmo símbolo, e extrair de cada uma a subexpressão que começa nessa posição.

Para $\{R(f(x), g(h(z)), a), R(f(x), g((f(u)), b), R(f(x), g((w), a)\}$ o conjunto de diferenças é

$$\{h(z), f(u), w\}$$

Para $\{R(f(a), g(x)), R(y, y)\}$ o conjunto de diferenças é

$$\{f(a), y\}$$

2.3 Algoritmo da Unificação (de Robinson)

Algoritmo da Unificação (de Robinson)

Dado um conjunto finito S de expressões simples, vamos descrever um algoritmo que retorna um *umg* de S, se e só se, S for unificável:

1. Seja $k = 0$ e $\sigma_0 = \iota$
2. Se $S\sigma_k$ contém exactamente um elemento, então parar e retornar σ_k como *umg* de S. Caso contário, determinar o conjunto de diferenças D_k de $S\sigma_k$
3. Se existirem v e t em D_k tais que v é uma variável que não ocorre em t, então $\sigma_{k+1} = \sigma_k[t/v]$, incrementar k e voltar para 2. Caso contrário, parar e indicar que S não é unificável.

Exemplo 24.2. $S = \{R(f(x), g(h(z)), a), R(y, g(f(u)), b), R(f(x), g(w), a)\}$

- $\sigma_0 = \iota$
- $D_0 = \{f(x), y\}$, $\sigma_1 = [f(x)/y]$ *e*
  $S\sigma_1 = \{R(f(x), g(h(z)), a), R(f(x), g(f(u)), b), R(f(x), g(w), a)\}$
- $D_1 = \{h(z), f(u), w\}$, $\sigma_2 = [f(x)/y][h(z)/w] = [f(x)/y, h(z)/w]$ *e* $S\sigma_2 = \{R(f(x), g(h(z)), a), R(f(x), g(f(u)), b)\}$
- $D_2 = \{h(z), f(u)\}$. *Logo, S não é unificável.*

Exemplo 24.3. *Seja* $S = \{P(a, x, h(g(z))), P(z, h(y), h(y))\}$. *Então,*

- $\sigma_0 = \iota$
- $D_0 = \{a, z\}$, $\sigma_1 = [a/z]$ *e* $S\sigma_1 = \{P(a, x, h(g(a))), P(a, h(y), h(y))\}$
- $D_1 = \{x, h(y)\}$, $\sigma_2 = [a/z, h(y)/x]$ *e*
  $S\sigma_2 = \{P(a, h(y), h(g(a))), P(a, h(y), h(y))\}$
- $D_2 = \{y, g(a)\}$,$\sigma_3 = [a/z, h(y)/x, g(a)/y]$ *e*
  $S\sigma_3 = \{P(a, h(g(a)), h(g(a)))\}$.
  Logo, S é o unificável e σ_3 um umg *de S.*

Exemplo 24.4. $S = \{P(x, x), P(y, f(y))\}$.

- $\sigma_0 = \iota$
- $D_0 = \{x, y\}$, $\sigma_1 = [y/x]$ *e* $S\sigma_1 = \{P(y, y), P(y, f(y))\}$
- $D_1 = \{f(y), y\}$. *Como y ocorre em $f(y)$, S não é unificável.*

3 Resolução

Regra da Resolução (geral)

Dado $L = \{l_1, \ldots, l_n\}$ um conjunto de literais, seja $\overline{L} = \{\overline{l_1}, \ldots, \overline{l_n}\}$.

Sejam C_1 e C_2 duas cláusulas sem variáveis em comum. Seja $L_1 \subseteq C_1$ e $L_2 \subseteq C_2$, tal que L_1 e $\overline{L_2}$ unificam com umg σ.

A **resolvente** $C = Res(C_1, C_2)$ de C_1 e C_2 é:

$$(C_1\sigma \setminus L_1\sigma) \cup (C_2\sigma \setminus L_2\sigma)$$

Sendo $\{p(f(x), g(y)), q(x, y)\}$ e $\{\neg p(f(f(a)), g(z)), q(f(a), g(z))\}$.

Um umg de $\{p(f(x), g(y))\}$ e $\{p(f(f(a)), g(z))\}$ é $[f(a)/x, y/z]$. Então, uma resolvente é

$$\{q(f(a), z), q(f(a), g(z))\}$$

Algoritmo de Satisfabibilidade por Resolução (geral)

Entrada Um conjunto de cláusulas S

Saída Se terminar, determina se as cláusulas são ou não satisfazíveis. Mas pode não terminar.

Seja $S_0 = S$.

No passo $i = 1, 2, \ldots$ escolher duas cláusulas C_1 e C_2 com resolvente $C = Res(C_1, C_2)$.

Se $C = []$, terminar e S não é satisfazível. Caso contrário $S_{i+1} = S_i \cup \{C\}$.

Se $S_{i+1} = S_i$ não há mais pares de cláusulas para *resolver* então terminar e S é satisfazível.