

Matemática Recreativa

Editor:
António Machiavelo

UM MANUSCRITO PERDIDO DO DR. WATSON:
SHERLOCK HOLMES E O SUDOKU
PARTE II

António Machiavelo e Rogério Reis

Departamentos de Matemática Pura e de Ciência dos Computadores

da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto

`ajmachia@fc.up.pt` `rvr@ncc.up.pt`

1. Ainda mais extraordinário

Desde que foi publicado o último número desta revista, conseguimos algum tempo para continuar a decifrar a intrincada caligrafia do Dr. Watson. Temos assim o prazer de trazer aos leitores deste Boletim a tradução de mais um excerto do manuscrito que, sem mais demoras, passamos a apresentar. Não podemos, no entanto, deixar de antever desde já que, se a primeira parte continha a revelação extraordinária que Sherlock Holmes terá construído os primeiros sudokus, esta segunda contém revelações não menos extraordinárias sobre o alcance e a profundidade do intelecto deste personagem mítico da investigação criminal.

2. O resto do manuscrito

[...] Fiquei perplexo com o modo assertivo com que Holmes declarou, assim de rompante, que a posição* a que eu chegara era impossível. Apesar de estar já habituado às extraordinárias faculdades de dedução do meu amigo, esta sua afirmação não pôde deixar de me surpreender. Como poderia ele ter visto tão rapidamente que a posição não tinha solução? Mesmo sendo o autor do problema, se eu tinha cometido um erro, certamente que o problema tinha trilhado caminhos que Holmes não poderia ter antevisto. Como poderia ele então analisar a posição tão rapidamente, quando eu tinha passado horas debruçado sobre ela sem perscrutar a mínima pista? E como poderia ele ter tanta certeza?

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1	3	7	6	4	8	⁵ ₉	⁵ ₉	2
b	⁴ ₂	5	⁴ ₂	¹ ₉	¹ ₉	7	3	6	8
c	6	8	9	3	2	5	1	7	4
d	² ₇	9	¹ ₄ ²	8	3	⁴ ₆	⁴ ₅ ⁵ ₇	¹ ₄ ⁵ ₇	¹ ₆
e	5	6	¹ ₄ ³	7	¹ ₉	2	8	¹ ₄ ⁹	¹ ₃
f	⁴ ₇	³ ₄ ⁷	8	¹ ₅ ⁹	⁵ ₆	⁴ ₆ ⁹	⁴ ₇ ⁹	2	¹ ₇ ³ ₆
g	³ ₉	¹ ₄ ²	6	² ₅	⁷ ₅	³ ₉	² ₇	8	¹ ₇
h	8	¹ ₂	5	4	⁷ ₆	³ ₆	² ₇	¹ ₃	9
i	⁷ ₉	² ₇	⁴ ₃	² ₉	8	1	6	⁴ ₃	5

Figura 1: Uma posição impossível.

— Holmes, como pode...

— Verdadeiramente elementar, meu caro Watson — *interrompeu, certamente lendo os meus pensamentos através da minha expressão de puro assombro*. — Uma vez garantido[†] que há um 3 em e9, deduz-se imediatamente: 3 em f1 e i3; 3 em h8; 3 em g6; 9 em f6. Daqui resulta: 1 em e5. Por outro lado, o 3 em h8 garante que se tem um 1 em g9. Agora: 1 em e5 e 1 em g9 implicam 1 em d8. Mas então não pode haver nenhum 1 na terceira coluna! A posição é portanto impossível.

*Que reproduzimos aqui novamente, na figura 1.

[†]Ver o artigo anterior.

Confesso que não sei se fiquei mais atônito com a velocidade com que Sherlock Holmes disparou estas deduções, ou com o facto de eu ter sido capaz de as seguir. Senti que, apesar de tudo, as horas passadas com o problema não tinham sido em vão e o esforço dispendido talvez tivesse aguçado algumas das minhas capacidades.

— Bem, vou começar o problema de novo, tendo mais cuidado desta vez — disse, determinado a resolvê-lo.

— Muito bem, Watson! — encorajou o meu companheiro — Um exercício de dedução é sempre uma excelente maneira de empregar o tempo. Mas primeiro o jantar! Estou esfomeado!

Tivemos uma refeição repousada, com Holmes a saborear cada garfada com uma intensidade que impedia qualquer prosseguimento da conversa. Depois do jantar, Holmes refugiou-se no seu melancólico violino, enquanto eu recomeçava o problema do início, tendo particular cuidado em verificar cada uma das minhas deduções. Com a experiência adquirida e os sábios ensinamentos anteriores do meu mentor, avancei de início rapidamente, para de novo me defrontar com outras dificuldades que só consegui ultrapassar com o esforço de largas horas nos dias que se seguiram.

Durante mais dois ou três sábados ainda apareceram no Daily News, sob o nome de «quadrados lógicos», outros problemas do mesmo tipo criados por Holmes, mas a sua extrema dificuldade, como eu bem pude experimentar, esfriou rapidamente o entusiasmo dos seus leitores, o que acabou por ditar o fim da rubrica.

Os meses que se seguiram foram preenchidos por uma torrente de casos que exigiu a atenção permanente de Sherlock Holmes e o assunto destes puzzles não voltou a ser abordado nas nossas conversas, até que, numa resplandesciente manhã luminosa, atípica do Março londrino, quando descia para o pequeno almoço, deparei com Holmes imerso num tumulto de papéis desdobrados, alguns de consideráveis dimensões, que transbordando da sua secretária, invadiam todas as mesas, cadeiras e restante mobília da sala.

— Holmes, que novo caso motiva esta confusão? — interroguei preocupado com a falta de condições para tomar o meu pequeno almoço.

— Ontem — explicou Holmes — cruzei-me em Piccadilly com o engenheiro espanhol Leonardo Torres y Quevedo, que conheci em França por ocasião de um meu serviço prestado ao governo daquele país. Disse-me que estava cá para conversar com o major-general Henry Babbage, com vista a estudar a possibilidade da construção, há tanto esperada, da «Máquina Analítica» inventada pelo pai.

— Babbage?... Máquina analítica?...

— Nunca ouviu falar do matemático Charles Babbage e dos seus planos para construir uma alternativa mecânica, rápida e sem erros para o trabalho moroso e tantas vezes descuidado dos computadores?

— Computadores? — *inquiri, percebendo cada vez menos a que Holmes se referia.*

— Meu caro Watson, quem julga que calcula as tabelas de artilharia, que decerto viu utilizar no Afeganistão? Aqueles valores, necessários para determinar a inclinação da peça, assim como a quantidade de pólvora para que o projectil atinga o seu alvo, são produto do trabalho de batalhões de funcionários públicos designados por «computadores». O mesmo acontece com as tabelas de efemérides, tão necessárias à navegação.

— De facto, nunca me tinha interrogado como eram obtidas essas tabelas. Pensei que fosse uma questão relativamente trivial — *disse, começando a perder as esperanças de um pequeno almoço tranquilo.*

— Longe disso, meu caro! Estas tabelas são produto de um processo de elaboração bem complicado, muito lento e com uma alta probabilidade de o resultado final conter erros. Pior ainda, como o processo de cálculo é recorrente, ou seja, os valores a calcular dependem de outros valores da tabela já calculados, estes erros propagam-se e amplificam-se por muitos dos valores seguintes. Na década de 1820, Charles Babbage sugere a construção de um engenhoso dispositivo mecânico que desempenhe estas tarefas: a «Máquina Diferencial».

— Diferencial? Então não era analítica?

— Calma, Watson. Em breve perceberá tudo. — *disse Holmes, apelando à minha paciência* — É que, ao pensar como melhorar alguns detalhes da sua máquina diferencial, Babbage concebeu a ideia de uma máquina universal que, em vez de ser construída para calcular uma tabela específica, pudesse ser programada através de cartões, do mesmo modo que é programado o tear de Jacquard, para resolver um qualquer problema numérico. Assim nasce o projecto da «Máquina Analítica», até agora nunca concretizado.

— Pensa colaborar na construção dessa máquina? — *propus, na esperança de ter finalmente percebido o que obstava à consumação da minha desejada refeição matinal.*

— Não propriamente! — *retorquiu Holmes, com o que me pareceu ser um toque de indignação na sua voz* — Não tenho qualquer interesse em problemas numéricos! A conversa com Leonardo Torres y Quevedo, que é um grande admirador de Babbage, fez-me pensar na possibilidade de uma variação da sua máquina analítica que fosse aplicável a problemas lógicos.

— Como pode uma máquina resolver problemas lógicos? — *inquiri,*

incrédulo.

— Em 1847, dois nossos compatriotas, Augustus de Morgan e George Boole, publicaram dois trabalhos notáveis, intitulados «*Formal Logic: or, the Calculus of Inference, Necessary and Probable*» e «*The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*», respectivamente. Foi o meu irmão Mycroft que me chamou a atenção há uns tempos para estas obras, infelizmente ainda muito pouco conhecidas. Nelas, de Morgan e Boole mostram como raciocínios lógicos podem ser simbólicamente analisados de um modo algébrico e algorítmico. Ora, Torres y Quevedo acabou de me dar um resumo de algumas das suas ideias para desenvolver uma «máquina algébrica» que efectuasse cálculos algébricos de uma forma automática, com base nas ideias de Babbage.

— Portanto, juntando as ideias de Boole e de Morgan com a máquina de Torres y Quevedo. . . — *disse eu, começando finalmente a perceber aonde a narrativa de Holmes conduzia.*

— . . . teríamos uma máquina capaz de fazer a análise lógica de problemas!
— *concluiu o meu companheiro* — Muito bem, Watson!

E continuou, após uma breve pausa:

— O que vê aqui são alguns dos planos do próprio Babbage, assim como uma excelente descrição sumária da máquina feita pelo conde de Menabrea. . .

— O antigo embaixador de Itália? Que conhecemos naquele caso delicado envolvendo um adido da sua embaixada? — *perguntei, surpreso, enquanto me tentava sentar.*

— Precisamente, Watson. E que antes tinha sido primeiro ministro de Itália. Pois bem, Menabrea assistiu à única apresentação pública feita por Babbage das suas ideias, em Turim. Subsequentemente escreveu uma monografia sobre o assunto, que foi traduzida por uma notável senhora, Ada Augusta, condessa de Lovelace, aluna de, precisamente, Augustus de Morgan. Ada Lovelace adicionou extensos e interessantíssimos comentários que tenho estado a ler com crescente admiração. Que mulher, que inteligência superior!

Sherlock Holmes nunca tinha elogiado assim uma mulher desde o caso que relatei com o título de «Um Escândalo na Boémia», em que Irene Adler o ultrapassou em sagacidade, e a quem Holmes se referia com o título honroso de «a mulher»[‡]. Fiquei, assim, deveras surpreso com o rol de elogios que teceu a esta outra mulher.

— Onde vive essa extraordinária criatura? — *perguntei, num tom levemente jocoso.*

— Infelizmente já não vive. — *respondeu, pesarosamente* — Faleceu

[‡]Ver [Doy91].

demasiado nova, vítima de um maldito cancro do útero. Tinha 36 anos. Estava ainda na flor da vida, e o que escreveu faz supor que estava no início do que seria um futuro brilhante, com importantes contribuições para a Matemática e a nova ciência da Lógica Formal. Que perda monumental, Watson! Uma verdadeira tragédia. . .

Era de facto bastante triste alguém com tanto potencial ter assim a vida tão drasticamente cortada. Holmes ficou em silêncio durante algum tempo, imerso em pensamentos que sou incapaz de adivinhar. Tomei finalmente o pequeno almoço, no meio de um silêncio um pouco soturno. Mas a luz que passava através das cortinas era demasiado branca e alegre para que se pudessem manter pensamentos lúgubres durante mais do que uns momentos. Não tardou a que Holmes recomeçasse a ler, soltando, de vez em quando e de si para si, umas exclamações de «Brilhante!» e «Genial!».

Com o estômago reconfortado, comecei a sentir-me mais predisposto para melhor perceber a tarefa a que Holmes se dedicava com tanta paixão, como aliás o fazia com tudo o que realmente lhe interessava.

— Que uso daria a uma tal máquina, Holmes? — *inquiri com algum receio de que me ignorasse, como frequentemente acontece quando está concentrado. Mas Holmes estava claramente com vontade de explicar as suas ideias. Talvez, naquela altura, verbalizar o que pensava o ajudasse a organizar os seus pensamentos.*

— Lembra-se dos «quadrados lógicos»? — *perguntou.*

— Sim, lembro-me perfeitamente. Passei muitas horas a tentar descobrir pistas. Mas porquê? — *inquiri, sem perceber porque razão Holmes mudava de assunto.*

— É que, Watson, a construção daqueles simples problemas com que se entreteve é, por si só, um problema muito mais profundo e interessante do que resolver os puzzles. Infelizmente a construção envolve algum trabalho rotineiro e aborrecido. Assim, uma máquina lógica poderia libertar o autor desses trabalhos menores, de modo a que este se pudesse concentrar nas tarefas mais interessantes, que constituem excelentes e apaixonantes desafios lógicos.

— Não se poderia aplicar essa máquina (que, pelo que percebi, seria algo bem sofisticado e de difícil construção) a problemas mais importantes? A problemas da vida real? Aos seus casos, por exemplo? — *interroguei.*

— Meu caro amigo, os problemas com que lido e os problemas da vida dita «real», — *disse, com um tom de ironia na voz* — são demasiado complexos para serem abordados por uma máquina lógica, pelo menos deste tipo. Não menospreze os problemas lúdicos, Watson, mesmo os mais simples, pois estes

são por vezes de uma enorme utilidade. Servem de tubo de ensaio e fornecem preciosas ideias para depois lidar com problemas mais complexos.

— A propósito, — *acrescentou Holmes* — acho que nunca lhe mostrei um dos problemas mais difíceis que inventei. De facto estava tão absorto com tantos dos seus pormenores, que quase diria que o problema se construiu a si próprio. Por isso, e por ser de análise particularmente difícil, chamei-lhe «o monstro».

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
a	1 <small>4 7 8</small>		³ 4 5 <small>7 8</small>	³ 7 5 6 <small>7</small>	³ 6 <small>8 9</small>	³ 5 6 <small>7 8</small>	³ 4 <small>8 9</small>	³ 6 <small>9</small>	2
b	^{2 3} 8	9 <small>7 8</small>	³	4 <small>8 6</small>	^{1 2 3} 6 <small>8 9</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	^{1 3} 8	5 <small>9</small>	³ 6 <small>8</small>
c	^{2 3} 4 5 <small>8</small>	² 4 <small>8</small>	6 <small>8</small>	^{1 2 3} 5 <small>8 9</small>	^{1 2 3} 6 <small>8 9</small>	^{1 2} 5 <small>8</small>	7 <small>9</small>	^{1 3} 4 <small>8 9</small>	³ 6 <small>8 9</small>
d	² 4 6 <small>8</small>	5 <small>7 8</small>	¹ 4 <small>7 8</small>	9 <small>4 6</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	3 <small>8 7</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	³ 6 <small>7 8</small>
e	^{2 3} 4 6 <small>8 9</small>	^{1 2} 4 6 <small>8 9</small>	^{1 3} 4 <small>8 9</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	7 <small>8 9</small>	^{1 2} 4 6 <small>7 8</small>	^{1 2 3} 5 <small>8 9</small>	^{1 2 3} 6 <small>8 9</small>	³ 5 6 <small>8 9</small>
f	^{2 3} 6 <small>7 9</small>	^{1 2} 7 6 <small>8 9</small>	^{1 3} 7 9 <small>8</small>	8 <small>7 9</small>	5 <small>6</small>	^{1 2} 6 <small>7 8</small>	^{1 2 3} 9	4 <small>7 9</small>	³ 6 <small>7 9</small>
g	7 <small>4 8</small>	¹ 4 <small>8 9</small>	¹ 4 5 <small>8 9</small>	^{1 2 3} 5 <small>4 8</small>	^{1 2 3} 4 <small>8</small>	^{1 2} 4 5 <small>8</small>	6 <small>9</small>	^{2 3} 4 5 <small>9</small>	³ 4 5 <small>9</small>
h	4 5 6	3 <small>4 5</small>	¹ 4 5 <small>7</small>	^{1 2} 5 6 <small>4 6</small>	^{1 2} 4 6 <small>7 8</small>	9 <small>4 5</small>	² 4 5 <small>7</small>	8 <small>4 5</small>	³ 4 5 <small>7</small>
i	^{4 5 6} 8 9	⁴ 6 <small>8</small>	2 <small>7 5 6</small>	³ 4 <small>8 6</small>	³ 4 5 6 <small>7 8</small>	^{4 5 6} 4 5 <small>7 8</small>	^{4 5} 6 <small>7 8</small>	³ 4 5 <small>7 9</small>	1

Figura 2: O monstro.

Sherlock mostrou-me o puzzle que reproduzo na figura 2, a que acrescentei as possibilidades para cada quadradinho livre, para benefício dos leitores mais intrépidos. Mas fica o leitor avisado que, apesar de Holmes ter garantido haver uma solução lógica, sem necessidade de tentativa e erro, e apesar de eu ter gasto várias e desesperantes horas com «o monstro», não consegui sequer avançar um único passo nesse sentido.

— O monstro — *continuou Holmes* — e outros puzzles que fui criando, conduziram-me ao problema de tentar perceber o que torna um puzzle difícil e outro fácil. Não é apenas o número de dados iniciais, pois há problemas com 17 dados iniciais que são triviais de resolver, enquanto que outros, como o monstro, com 21, desafia as melhores mentes! Há algo de subtil nesta questão, que eu gostava de investigar. Repare, Watson, que este é um problema que tem a ver com a construção de problemas. É, por assim dizer, um problema de lógica de um segundo patamar! — *exclamou, encantado com a subtilidade da sua própria observação.*

— Poderia dar-lhe muitos outros exemplos — *prossegiu* — de problemas que a construção de puzzles envolvendo quadrados lógicos me sugeriu, como por exemplo: qual o número mínimo de pistas iniciais que um puzzle deve ter para determinar unicamente um quadrado lógico? Inversamente, dado um quadrado lógico, qual o número mínimo de pistas que o determina? Será este número o mesmo para todos os quadrados lógicos?... Para investigar estes problemas precisava de construir e analisar muitos exemplos de quadrados lógicos, de modo a ganhar intuição sobre estes assuntos. Como a criação de exemplos é muito demorada e tem aspectos demasiado rotineiros, acabei por abandonar o estudo destas questões, tendo apenas obtido resultados parciais. Ora, a conversa que tive com Torres y Quevedo fez-me ter a ideia de adaptar a máquina de Babbage e finalmente prosseguir o estudo desses problemas.

Eu estava sem palavras, espantado em ouvir como um simples problema envolvendo apenas um quadrado dividido em 81 quadradinhos e os algarismos de 1 a 9 podia conduzir a questões desta complexidade!

— As brilhantes observações de Ada Lovelace — *disse ainda Holmes* — sobre aquilo a que se poderia chamar a programação da máquina. . .

— Programação? — *interroguei-me em voz alta. A pergunta era desnecessária, pois era claro que Holmes iria explicar o que queria dizer com tal termo neste contexto.*

— Programar a máquina mais não é do que fornecer as necessárias instruções, através de cartões perfurados, para que a máquina execute certos cálculos numa ordem precisa e determinada. Estava eu dizendo, que a leitura das observações sagazes da condessa de Lovelace deram-me a ideia de como seria possível programar uma máquina que executasse mecanicamente operações lógicas simples, por forma a resolver quadrados lógicos automaticamente.

— Uma máquina a resolver problemas sózinha? — *interroguei, sentindo-me quase insultado com a perspectiva, depois de todas as horas que passei tentando resolver os problemas do Daily News. . .*

— Sim, e é elementar, meu caro Watson! — *exclamou Holmes.* — Uma tal máquina seria um poderosíssimo instrumento de dedução. Note que isso não quer, de forma alguma, dizer que a máquina por si só descubra alguma coisa, o que ela permite é, de forma muito expedita e sem os erros a que os humanos são muitas vezes acometidos, repetir tarefas de dedução ou cálculo para muitos mais casos do que os que nós poderíamos fazer sem o seu auxílio.

— Mas então, nós temos de saber antecipadamente realizar a tarefa, para que a máquina a possa realizar? — *inquiri, confuso.*

— Mais do que saber realizar a tarefa, temos de saber exprimir de uma forma tão simples e inequívoca que a máquina a possa executar, como

de uma simples receita de *scones* se tratasse. — *retorquiu.*

— De facto, com uma receita escrita de uma forma detalhada e simples, acho que até eu conseguiria fazer uns *scones*, ainda que duvide que ficassem tão apetitosos como os da Sra. Hudson. — *observei.*

— Deixemos a culinária! — *disse Holmes* — Suponha que quando estive em Kabul, o Emir lhe colocava o seguinte problema. O cofre do palácio do seu sogro, Raja Jahandad, chefe dos Gakhars, concebido aliás há já bastante tempo, tem umas características deveras singulares. O seu dispositivo de segurança é constituído por um conjunto de fechaduras numa parede, cujo número não importa para o que vamos ver, mas que não é pequeno. Digamos que são mais de uma dezena.

— A fortuna dos Gakhars justifica bem tais medidas de segurança! — *comentei.*

— Agora, para cada fechadura existe um conjunto diferente de chaves, cada uma delas decorada com uma divindade hindu.

— Isso pode corresponder a um grande conjunto de chaves! - *exclamei, lembrando-me da intrincada hierarquia de divindades indianas.*

— Ora, o Emir explica-lhe que o sogro se esqueceu da combinação de divindades que permite abrir a porta do seu próprio cofre e pede-lhe um método para a procura de tal combinação. Como não há nenhuma forma de adivinhar qual a combinação original, resta a alternativa de tentar todas as hipóteses. Para isso há que experimentar, para cada chave da primeira fechadura, todas as chaves da segunda. Para cada chave da segunda, todas as chaves da terceira. E assim por diante. . .

— Apesar de perceber que acabaria por encontrar a desejada combinação, isto iria atormentar-me durante muitos meses. — *comentei eu.*

— Por isso mesmo, o Emir sugere-lhe que use alguns dos seus criados para realizar tal tarefa. Mas a experiência não resulta porque, para que os criados não se confundam durante este moroso e repetitivo sistema, o meu amigo teria que ficar a supervisionar todo o processo. Ou seja, não se livraria de ter que gastar os próximos meses (ou anos) com aquela entediante tarefa. — *acrescentou, Holmes.*

— Pois. . . — *disse eu, começando a perceber o cerne do problema.*

— A solução passa, então, por encarregar os criados do Emir de uma tarefa muito simples (e igual para todos) que não necessite de ninguém a supervisionar, e que resolva o problema. A tarefa que cada homem tem que executar pode ser descrita da seguinte forma:

- Sempre que lhe for pedido que realize a sua tarefa (for activado), tenta cada uma das chaves do seu molhe, mas depois de introduzir uma chave,

activa o homem que se encontra à sua direita e espera que este termine antes de passar à chave seguinte.

- O último homem, o que se encontra mais à direita, como não tem nenhum outro que tenha que activar, quando tenta as suas chaves, fá-lo portanto em sequência e sem esperar por ninguém.

A única coisa que o meu amigo tem que fazer, depois de instruir os homens do Emir e garantir que eles entendem perfeitamente a tarefa que lhes é confiada, é pedir ao primeiro homem, o mais à esquerda, para realizar a sua tarefa. Pode então garantir ao Emir que o problema está a ser resolvido, e regressar à sua pacata vida de sempre.

— De facto, é uma solução engenhosa! — *exclamei, acrescentando com alívio jocoso* — E que me livra da tarefa do Emir, que já me parecia mais uma condenação!

— Mais do que isso, Watson. Neste processo não necessitamos conhecer antecipadamente o número de fechaduras. O Emir poderia mesmo, pela proximidade do seu harem, não permitir que o meu amigo entrasse no aposento do cofre, e no entanto isso não o impediria de instruir correctamente os seus criados por forma a levarem a bom termo o problema da abertura do cofre, mesmo não conhecendo antecipadamente o número de fechaduras.

— De facto! — *constatei, admirado com a elegância do procedimento.*

— Ora, as subtarefas de um programa que podemos executar na máquina de Babbage são um pouco como os criados do Emir. Podemos confiar que realizarão o seu trabalho com empenhamento e qualidade, mas não devemos supor que tenham qualquer iniciativa própria, nem permitir que a descrição da tarefa que lhe atribuímos seja demasiado complicada.

— Espero que veja agora, Watson, — *continuou Holmes* — que a geração de um quadrado lógico não é muito diferente da procura de uma combinação de chaves para o cofre de uma qualquer fortuna. E também que a programação é, por si só, um problema de lógica extremamente interessante. Repare, meu caro e paciente amigo, que temos agora, no caso em questão, um problema lógico (*a programação*) sobre um problema lógico (*como construir quadrados lógicos de um dado nível de dificuldade*) envolvendo a construção de problemas lógicos (*os quadrados lógicos*)!

*

A construção da máquina de Babbage e, conseqüentemente, a da máquina lógica de Holmes, envolvia dificuldades técnicas que não chegaram a ser transpostas e, passadas as semanas iniciais de grande entusiasmo, nunca

mais ouvi o meu companheiro mencionar o assunto. Mas os quadrados lógicos viriam, anos mais tarde, a atrair de novo a atenção de Sherlock Holmes, num contexto um pouco diferente e que não sei se conseguirei descrever apropriadamente.

Tudo se passou numa noite particularmente fria de Inverno, a seguir a uma visita que Holmes fez ao seu irmão Mycroft. Este tinha capacidades de observação e de dedução superiores às de Sherlock Holmes, segundo assegurava o próprio Holmes[§], que por vezes o consultava em alguns dos casos mais complexos. Mas, contrariamente ao irmão, Mycroft não tinha o menor interesse em investigar casos criminais se tal implicasse a mais pequena deslocação. Era o homem mais sedentário que imaginar se possa.

No fim da tarde desse dia, Holmes foi ter com o seu irmão ao clube Diógenes, um retiro muito original e singular criado pelo próprio Mycroft para homens avessos ao convívio, seja por acanhamento ou misantropia, e onde este se encontrava todos os dias, invariavelmente entre as cinco menos um quarto e as vinte para as oito[¶]. Apesar da noite fria e dos ventos gélidos, Holmes regressou a Baker Street em efervescência!

— O engenho humano é infinito, Watson! — exclamou, com um intenso entusiasmo, ao entrar na sala.

— Vejo que o encontro com Mycroft foi profícuo. — disse eu, um tanto surpreso, pois apesar de saber que Holmes admirava os dotes de raciocínio do seu irmão, nunca o tinha ouvido exclaimar um elogio tão rasgado e que me pareceu até algo excessivo. Descobri pouco depois que se referia a outrem.

— Mais do que possa imaginar, Watson! Depois de confirmar alguns dos aspectos mais delicados do meu raciocínio, naquele assunto melindroso de que lhe falei, Mycroft descreveu-me uns trabalhos de um tal Georg Cantor, um matemático da Universidade de Halle, que tem vindo a publicar trabalhos de uma originalidade arrebatadora.

Apesar de não ter ainda descortinado a extensão dos conhecimentos matemáticos de Sherlock Holmes, sei que este admira e conhece em detalhe toda a obra de Euclides, e que usa trigonometria com extrema facilidade. Chegou mesmo a usar os seus conhecimentos de geometria, embora apenas aspectos elementares — como Holmes não poderia deixar de observar — num caso que me contou e que registei com o nome de O Ritual Musgrave^{||}. Já Mycroft é formado em Matemática e, apesar de a ela não se dedicar profissionalmente, Holmes já me tinha mencionado que o seu irmão se mantinha ao corrente de

[§]Ver [Doy93b], p. 182.

[¶]Ver [Doy93b], pp. 182–183.

^{||}Ver [Doy93a].

alguns dos seus desenvolvimentos mais recentes. Porém, nunca antes tinha visto o meu amigo tão empolgado com uma novidade matemática.

— Imagine Watson — *continuou* — que Cantor descobriu que há diversos tipos de infinito!

— Tipos de infinito? O infinito não é simplesmente o que não é finito? — *inquiri.*

— Pois, até hoje também eu pensava que sim! Mas depois lhe explicarei, Watson. Agora já se faz tarde e gostava ainda de reflectir um pouco em algo que a conversa com Mycroft sobre infinitos me deixou a pensar: uma versão infinita dos quadrados lógicos. Parece-me que tenho aqui um desafio interessante. . .

— Bem, um problema envolvendo o infinito é certamente algo em que nenhuma máquina o poderia ajudar! — *assegurei eu.*

— Isso é muito menos óbvio do que se possa pensar à primeira vista, Watson. . . — *disse Holmes, de uma forma introspectiva.*

3. Sobre o conteúdo do manuscrito

Há algumas observações sobre o manuscrito que gostaríamos aqui fazer. Em primeiro lugar, pode colocar-se a questão de saber quando ocorreram os acontecimentos relatados no manuscrito. Certamente após o período conhecido como o «grande hiato» ([Ren05], p. 135): 1891–1894, pois este é aí explicitamente referido (ver notas 1, 2 e 3 da Parte I). Como implicitamente observamos na nota 4 da primeira parte, indicando um artigo publicado na revista *The Mathematical Intelligencer*, foi exactamente nesse período que alguns jornais franceses publicaram quebra-cabeças com algumas semelhanças com os sudokus actuais, numa altura em que se sabe que Sherlock Holmes se encontrava em França, mais precisamente em Montpellier (ver as referências [Boy07] e [Doy03] da primeira parte, assim como [Ren05], pp. 164–165, que contém algumas especulações interessantes, mas talvez um tanto ou quanto fantasiosas).

As referências de que o manuscrito é profícuo parecem ser todas historicamente consistentes. Deixamos aqui apenas algumas observações que poderão ser úteis na verificação dessa consistência*:

- Sobre a vida fascinante de Charles Babbage (1791–1871), que foi *Lucasian Professor* na Universidade de Cambridge, lugar ocupado por nomes

*Para além das fontes explicitamente citadas, foram amplamente usadas a *Wikipedia* (<http://en.wikipedia.org/wiki/>), *The MacTutor History of Mathematics archive* (<http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/>), assim como o livro de Martin Davis [Dav00].

tão ilustres como Newton, Stokes, Dirac e, presentemente, Stephen Hawking, consultar [Swa01].

- Ada Lovelace (1815–1852) era filha de Lord Byron e foi a grande divulgadora da obra de Babbage. Os comentários que inclui na sua tradução da monografia do conde de Menabrea sobre a «Máquina Analítica» revelam um profundo conhecimento do seu funcionamento e justificam a sua reputação como a primeira «programadora» da História[†]. Por este facto, a uma linguagem de programação foi dado o seu nome: ADA.
- Frederico Luigi, Conde de Menabrea, Marquês de Valdora (1809–1896), era oficial de engenharia, doutorado em Matemática pela universidade de Turim, onde Babbage deu uma série de conferências sobre a *Máquina Analítica* em 1840. Foi apoiante de Garibaldi enquanto primeiro ministro de Itália (1867–1869), tendo posteriormente sido embaixador em Londres (1869–1882) e em Paris (1882–1892).
- Joseph Marie Charles (1752–1834), conhecido como Jacquard, tecelão e inventor francês, melhorou uma técnica desenvolvida por Jacques de Vaucanson (1709–1782) para controlar teares usando cartões perfurados para tecer padrões complexos.
- Leonardo Torres y Quevedo (1852–1936), engenheiro e prolífero inventor espanhol, apresentou à Real Academia das Ciências de Madrid uma comunicação em 1893 sobre «máquinas algébricas» e, dois anos depois, uma comunicação com o mesmo tema à Academia das Ciências de Paris. Para mais pormenores sobre a vida e obra deste outro Leonardo, construtor do primeiro verdadeiro autómato de xadrez, ver [PR01, Ran82].
- Augustus de Morgan (1806–1871) e George Boole (1815–1864) têm uma obra marcada por trabalhos que foram seminais para a construção da lógica moderna (ver [Dav00, Bur09]).
- Georg Cantor (1845–1918) foi professor em Halle de 1869 a 1913, sendo o criador da moderna teoria dos conjuntos. O seu famoso *argumento*

[†]Em <http://www.fourmilab.ch/babbage/contents.html>, John Walker, co-autor do programa AutoCAD, escreve: «If you have ever doubted, even for a nanosecond, that Lady Ada was, indeed, the First Hacker, perusal of this document [Men42] will demonstrate her primacy beyond a shadow of a doubt».

diagonal foi publicado em 1891 [Can91], exactamente no início do «grande hiato».

Ficamos a saber pelo manuscrito que Mycroft Holmes, que ao serviço do governo britânico personifica o papel de «base de dados» inteligente[‡], tem uma forte formação matemática, o que sustenta parcialmente as teses pouco fundamentadas feitas em [Ren05], p. 27.

A referência por Holmes aos «computadores» e à sua laboriosa vida de cálculo (e erro!) pode ser esclarecida com a leitura do capítulo 1 e início do capítulo 2 de [Swa01].

A título de curiosidade, fazemos notar ao leitor que o jornal *Daily News* foi fundado em 1846 por Charles Dickens e contou com a colaboração de nomes como George Bernard Shaw e H. G. Wells. Deixou de ser publicado em 1930.

Por tudo isto, concluímos que se o manuscrito do Dr. Watson for uma fraude, então os autores da brincadeira teriam que ser, para além de muito pouco sensatos na utilização do seu tempo livre, pessoas com uma preocupação doentia com detalhes[§] e conhecedores de literatura Sherlockiana, de História da Ciência de Computadores e da Matemática, e em geral, da História Universal, intersecção que se nos afigura muito improvável ser não-vazia.

*

O exemplo da solução de Sherlock Holmes para o problema do cofre do Emir, corresponde ao que se chama uma *descida recursiva*. De facto, o procedimento apresentado é isomorfo ao da pesquisa de uma solução para um problema de sudoku. Esta pesquisa, condicionada ou não a um conjunto de pistas iniciais que constituem um problema, pode ser descrita como fazemos de seguida. Para tal, vamos usar uma lista (o primeiro parâmetro da função *geraSudoku()*, no programa abaixo apresentado) para representar o *sudoku*, quer isto dizer que os índices das posições de um *sudoku* 9×9 estão entre 0 e 80. Suponhamos que as pistas iniciais do problema (a existirem) estão guardadas no conjunto $R \subseteq \{0, \dots, 80\} \times \{0, \dots, 8\}$; que $R_{(0)}$ representa a projecção de R na primeira coordenada; que, para $i \in R_{(0)}$, $R[i]$ é definido de tal forma que $(i, R[i]) \in R$; que os conjuntos L_i ($i \in \{0, \dots, 8\}$) contêm os valores já «utilizados» em cada linha i , o mesmo acontecendo com C_i para as colunas, e com $B_{i,j}$ ($(i, j) \in \{0, 1, 2\}^3$) para os blocos. No algoritmo, /

[‡]Ver [Doy08], p. 161.

[§]A propósito, qual o nome do Emir?

deve ser interpretado como a divisão inteira, $[]$ como a lista vazia, e $+$ como a concatenação no caso dos operandos serem listas.

```

1  def regista(c, k):
2       $L_{k/9} = L_{k/9} \cup \{c\}$ 
3       $C_{k \bmod 9} = C_{k \bmod 9} \cup \{c\}$ 
4       $B_{k/27, (k \bmod 9)/3} = B_{k/27, (k \bmod 9)/3} \cup \{c\}$ 
5
6  def apaga(c, k):
7       $L_{k/9} = L_{k/9} \setminus \{c\}$ 
8       $C_{k \bmod 9} = C_{k \bmod 9} \setminus \{c\}$ 
9       $B_{k/27, (k \bmod 9)/3} = B_{k/27, (k \bmod 9)/3} \setminus \{c\}$ 
10
11 def compativel(c, k):
12     if  $c \in L_{k/9} \vee c \in C_{k \bmod 9} \vee c \in B_{k/27, (k \bmod 9)/3}$ : return False
13     else: return True
14
15 def geraSudoku(S, i):
16     if  $i > 80$ : output S
17     else:
18         if  $i \in R_{(0)}$ : geraSudoku(S + [R[i]], i + 1)
19         else:
20             for  $t \in \{0, \dots, 8\}$ :
21                 if compativel(t, i):
22                     regista(t, i)
23                     geraSudoku(S + [t], i + 1)
24                     apaga(t, i)
25
26     geraSudoku([], 0)

```

No programa[¶], a função *regista*(*c*, *k*) (respectivamente, *apaga*(*c*, *k*)) coloca (retira) o algarismo *c* na (da) posição *k* do sudoku e nas (das) respectivas linhas, colunas e blocos. Isto corresponde, na analogia de Holmes, à introdução (remoção) da chave *c* pelo criado *k* na respectiva fechadura. A função *compativel*(*c*, *k*) verifica se o algarismo *c* na posição *k* satisfaz as regras do jogo. Finalmente, *geraSudoku*(*S*, *i*) corresponde à activação do *i*-ésimo criado, sendo *S* o resultado da acção dos criados à sua «esquerda». Formalmente, há «mais um criado» (de ordem 81), que só é activado quando se encontra uma solução completa, e que se limita a escrever tal resultado. Assim, o programa gera todas as soluções para um dado problema e se pretendermos alterar as regras do sudoku isso pode ser feito facilmente alterando as funções

[¶]Disponível, em Python, em <http://ncc.up.pt/~rvr/python/sudoku.py>

registra(), *apaga()* e *compativel()* do modo apropriado.

4. Sudokus formalizados e generalizados

A leitura do notável manuscrito de Watson e das não menos notáveis reflexões de Holmes sobre os seus «quadrados lógicos», actualmente conhecidos como *sudokus*, inspiraram-nos as observações que incluímos nesta secção final. Porque existe sempre alguma confusão sobre o que se entende por um *sudoku*, faz sentido aqui estabelecermos uma convenção. Sempre que referimos um *sudoku* queremos referir uma grelha preenchida, respeitando as restrições acordadas. Quanto aos problemas (ou puzzles), ou seja sudokus incompletos, que constituem desafios a completar, respeitando as regras acima referidas, estes serão designados por *problemas de sudoku*.

Um sudoku usual pode ser reinterpretado do seguinte modo: usando coordenadas (i, j) ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) para os blocos e (k, l) ($k, l \in \{1, 2, 3\}$) para, respectivamente, as colunas e as linhas dentro de cada um dos blocos (ver figura 3), a posição de uma entrada num sudoku é assim determinada por

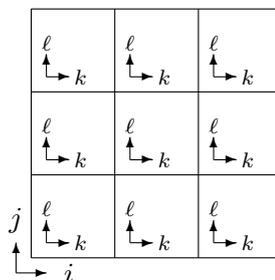


Figura 3: Um novo conjunto de coordenadas para sudokus

um quadrúpla* $(i, j, k, l) \in \{1, 2, 3\}^4$. Por exemplo, o ponto $(1, 2, 3, 3)$ denota a posição do canto superior direito do bloco central esquerdo.

Por outro lado, o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ pode ser identificado com o conjunto $\{1, 2, 3\}^2$, por exemplo, através de $(x, y) \mapsto x + 3(y - 1)$. Um sudoku pode assim ser visto como uma aplicação $\sigma: \{1, 2, 3\}^4 \rightarrow \{1, 2, 3\}^2$. O requisito de cada bloco conter um e um só dígito traduz-se na seguinte condição[†]: $\sigma|_{\{x\} \times \{y\} \times \{1,2,3\} \times \{1,2,3\}}$ é uma bijecção, para todo $x, y \in \{1, 2, 3\}$

*Dado um conjunto A , A^2 denota o conjunto $A \times A$ dos pares ordenados constituídos por elementos de A . Em geral, $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ factores}}$.

[†]Dada uma aplicação $f: A \rightarrow B$ e um subconjunto S de A , a notação $f|_S$ denota a

(ou seja, para todos os blocos). Sugerimos que, antes de prosseguir, o leitor tente traduzir nesta notação o requisito de haver um e um só algarismo em cada linha, assim como o correspondente requisito para as colunas.

Isto permite generalizar a noção de *sudoku* a um qualquer conjunto:

Definição 1 *Seja A um conjunto qualquer. Uma aplicação $\sigma: A^4 \rightarrow A^2$ diz-se um sudoku sobre A se, para todos $x, y \in A$, as aplicações:*

$$\sigma|_{\{x\} \times \{y\} \times A \times A}, \quad \sigma|_{\{x\} \times A \times \{y\} \times A}, \quad \sigma|_{A \times \{x\} \times A \times \{y\}}$$

forem bijecções.

Questões de simetria na formalização anterior conduzem naturalmente ao seguinte conceito:

Definição 2 *Seja A um conjunto qualquer. A aplicação $\sigma: A^4 \rightarrow A^2$ diz-se um hiper-sudoku sobre A se for um sudoku sobre A para o qual as aplicações:*

$$\sigma|_{\{x\} \times A \times A \times \{y\}}, \quad \sigma|_{A \times \{x\} \times \{y\} \times A}, \quad \sigma|_{A \times A \times \{x\} \times \{y\}},$$

são também bijecções, para todos $x, y \in A$.

É fácil ver que existem sudokus sobre um qualquer conjunto finito. De facto, se A é um conjunto com n elementos ($n \in \mathbb{N}$), podemos identificar A com o conjunto $I_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ e A^2 com I_{n^2} , sendo fácil ver que a única aplicação

$$\sigma: I_n^4 \rightarrow I_{n^2}$$

que satisfaz

$$\sigma(a, b, c, d) \equiv na + b + c + nd \pmod{n^2}$$

dá origem a um sudoku **[Porquê?]**[‡].

Há agora uma série de questões que surgem de um modo natural, e que desafiamos o leitor a tentar responder[§]:

1. Será que existem hiper-sudokus sobre o conjunto $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$?
2. Como modificar o programa anterior para averiguar tal existência?

restrição de f a S , ou seja a aplicação $S \rightarrow B$ dada por $s \mapsto f(s)$.

[‡]Aconselhamos a leitor a ver, explicitamente, que sudoku sobre I_3 é dado por esta aplicação. Adicionando 1 a cada uma das entradas, obtém-se um sudoku no sentido usual.

[§]As soluções devem ser enviadas por e-mail ou para o endereço: António Machiavelo, Departamento de Matemática Pura, Rua do Campo Alegre, n.º 687, 4169-007, Porto.

3. Será que existem hiper-sudokus sobre um qualquer conjunto finito?
4. Será que existe algum sudoku sobre \mathbb{N} ? E hiper-sudokus?

O leitor mais perspicaz reconhecerá que as definições de sudoku e de hiper-sudoku sobre um conjunto tem algo a ver com uma certa distribuição de números num certo reticulado incluído num certo hipercubo, em que se impõe que certas «fatias» bidimensionais contenham todos os números, exactamente uma vez. Tudo isto pode ser generalizado a outras dimensões.

Definição 3 *Seja A um qualquer conjunto não-singular. Dados $m, n \in \mathbb{N}$ e um conjunto J de subconjuntos de cardinalidade n de $\{1, 2, \dots, m\}$, a aplicação $\sigma: A^m \rightarrow A^n$ diz-se um sudoku sobre A , de dimensão m com restrições J , se todas as aplicações $\sigma|_S$ forem bijecções, para todos os conjuntos $S \subseteq A^m$ da forma $S = S_1 \times S_2 \times \dots \times S_m$, com $S_i = A$ ou $|S_i| = 1$, para todo $i = 1, 2, \dots, m$, e onde $\{i : S_i = A\} \in J$.*

Usando a formalização aqui introduzida, o leitor mais temerário pode agora pegar na sua categoria favorita, exigir que o conjunto A seja um objecto dessa categoria e que as aplicações sejam morfismos da mesma, e estudar sudokus sobre semigrupos, monóides, grupos; sudokus lineares e sudokus sobre os mais diversos tipos de álgebras; sudokus contínuos, diferenciáveis, de classe C^∞ , etc. . . ¶

Deixamos aos leitores o problema de colocar problemas (interessantes) sobre estes super-hiper-sudokus!

Apelo aos eventuais leitores: Os autores desta coluna temem que, tal como Holmes e a sua coluna de quadrados lógicos no *Daily News*, tenham começado a conduzir por um caminho para o qual não está antecipadamente garantida a existência de passageiros. Agradecemos, pois, aos improváveis leitores que fizessem prova de vida. Para tal, pedíamos encarecidamente que enviassem um + ou um -, com a semântica óbvia, para o endereço electrónico de um dos dois assumidos responsáveis pelas presentes manifestações de delírio.

¶O leitor pode ainda tentar definir a noção apropriada de morfismo entre sudokus, de modo a ter uma categoria.

Referências

- [Bur09] Stanley Burris, *The Algebra of Logic Tradition*, Stanford Encyclopedia of Philosophy, publicado a 2 de Março de 2009 em <http://plato.stanford.edu/entries/algebra-logic-tradition/>.
- [Can91] Georg Cantor, *Ueber eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **1** (1890/91), pp. 75–78. A parte contendo o famoso *argumento da diagonal* está disponível *online*, com uma tradução para inglês, no site «*The Logic Museum*», em <http://uk.geocities.com/frege@btinternet.com/>. O original está disponível no site «*Göttinger Digitalisierungszentrum*», em <http://gdz.sub.uni-goettingen.de/>
- [Dav00] Martin Davis, *The Universal Computer*, W. W. Norton & Ca., 2000. Uma tradução portuguesa foi publicada em 2004 pela Editorial Bizâncio.
- [Doy91] A. Conan Doyle, *Um Escândalo na Boémia* (1891), em **Aventuras de Sherlock Holmes**, vol. 2, Círculo de Leitores, 1981.
- [Doy93a] A. Conan Doyle, *O Ritual Musgrave* (1893), em **Aventuras de Sherlock Holmes**, vol. 3, Círculo de Leitores, 1981.
- [Doy93b] A. Conan Doyle, *O Intérprete Grego* (1893), em **Aventuras de Sherlock Holmes**, vol. 3, Círculo de Leitores, 1981.
- [Doy08] A. Conan Doyle, *Os Planos do Submarino Bruce-Partington* (1908), em **Aventuras de Sherlock Holmes**, vol. 5, Círculo de Leitores, 1981.
- [LMS83] Henry Ledgard, E. Patrick McQuaid, Andrew Singer, **From Baker Street to Binary: an introduction to computers and programming with Sherlock Holmes**, McGraw Hill, 1983.
- [Men42] L. F. Menabrea, *Sketch of the Analytical Engine*, Bibliothèque Universelle de Genève, **82** (1842). Tradução de Ada Augusta, Condessa de Lovelace, com um extenso comentário da tradutora, publicada em 1843 na colecção *Scientific Memoirs* de Richard Taylor. Disponível *online* em <http://www.fourmilab.ch/babbage/contents.html>
- [PR01] Francisco González de Posada, Francisco A. González Redondo, *Leonardo Torres Quevedo (1852–1936) 1ª Parte. Las máquinas algébricas*, La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **7.3** (2004), pp. 787–810. Disponível *online* em <http://www.rsme.es/gacetadigital/abrir.php?id=440>
- [Ran82] Brian Randell, *From Analytical Engine to Electronic Digital Computer: the contributions of Ludgate, Torres, and Bush*, Annals of the History of Computing **4** (1982), pp. 327–341. Disponível *online* em <http://www.cs.ncl.ac.uk/research/pubs/articles/papers/398.pdf>
- [Ren05] Nick Rennison, **Sherlock Holmes (biografia não autorizada)**, Esfera do Caos, 2005.
- [Swa01] Doron Swade, **The Cogwheel Brain**, Abacus, 2001.
- [Woo65] James Playsted Wood, **The Man Who Hated Sherlock Holmes**, Pantheon Books, 1965.