Tópicos de Matemática Discreta (C.C. & M.A.T.) – 95/96

Ana Paula Tomás, Nelma Moreira e Pedro Vasconcelos

1996

Exercícios de Tópicos de Matemática Discreta

95/96

Folha nº 1

1 Indução finita

Exercício 1.1 Encontre uma expressão, em função de n para a soma dos n primeiros inteiros ímpares. Mostre por indução finita que a expressão que encontrou é válida.

Exercício 1.2 Justifique a afirmação:

Não é verdade que qualquer que seja n inteiro positivo, $n^2 + n + 41$ é primo.

Exercício 1.3 Mostrar que o termo de ordem n, $n > 1$, de uma progressão aritmética de razão r e primeiro termo a_1, é dado por $a_n = a_1 + (n-1)r$.

Exercício 1.4 Mostrar que, para todo $a > 0$, a sucessão a

$$\sqrt{a},\ \ \sqrt{a+\sqrt{a}},\ \ \sqrt{a+\sqrt{a+\sqrt{a}}},\ \ \ldots$$

é limitada superiormente por $\frac{1+\sqrt{4a+1}}{2}$.

Exercício 1.5 Seja f a sucessão assim definida por recorrência:

$$\begin{aligned} f(1) &= 1, \\ f(n) &= 2n - 1 + f(n-1), \quad n > 1. \end{aligned}$$

Seja g a sucessão definida por $g(n) = n^2$, $n > 1$. Mostrar que f e g são iguais.

Exercício 1.6 Considere a *sucessão de Fibonacci*, definida por recorrência,

$$\begin{aligned} F_0 &= 0 \\ F_1 &= 1 \\ F_n &= F_{n-1} + F_{n-2},\ n \geq 2 \end{aligned}$$

Mostre, por indução, que

$$F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = (-1)^n,\ \forall n \geq 1$$

Exercício 1.7 Sendo $(F_n)_{n\in N}$ a sucessão de Fibonacci (definda no exercício anterior), prove que:

$$\begin{aligned} F_{2n-1} &= F_{n-1}^2 + F_n^2 \\ F_{2n} &= 2F_{n-1}F_n + F_n^2 \end{aligned}$$

para todo $n \geq 1$. [*Nota:* estas relações permitem elaborar algoritmos que calculam a sucessão de Fibonacci de uma forma mais eficiente do que a aplicação directa da definição. . .]

Exercício 1.8 Ainda sobre a sucessão de Fibonacci, mostre a seguinte *fórmula fechada* — *i.e.*, sem recorrência — para F_n:

$$F_n = \frac{(\phi^n - \hat{\phi}^n)}{\sqrt{5}}$$

onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ é a *razão de ouro*, e $\hat{\phi} = 1 - \phi$.

Exercício 1.9 Considere uma sequência de quadrados tal que cada quadrado, a partir do segundo tem por vértices os pontos médios do quadrado anterior.

Mostre que, se o lado do primeiro quadrado é l, então a área do n-ésimo quadrado é $l^2/2^{n-1}$.

Exercício 1.10 Suponha que só dispõe de selos de 3 e 5 escudos; mostre que é possível selar uma encomenda postal para qualquer franquia inteira a partir de 8 escudos (pode utilizar um número qualquer de selos, mas não se pretende perder dinheiro...)

Pode conceber um *algoritmo* que, dado uma franquia, calcula o número de selos de 3 e 5 escudos necessários?

Exercício 1.11 Mostrar que os números da sequência 49, $4\underline{48}9$, $44\underline{48}89$, ... são quadrados de números inteiros (NB: um número é obtido por inserção de 48 a meio do número anterior na sequência).

Exercício 1.12 Mostrar que em qualquer instante o número de homens que trocaram com os restantes um número ímpar de apertos de mão é par.

Exercício 1.13 No problema da *Torre de Hanoi* é dado uma torre de n discos de diâmetro descrescente, colocada num de três pilares; o objectivo consiste em mover a torre para outro pilar, um disco de cada vez, *de modo a nunca colocar um disco maior sobre um menor*.

Uma solução para este problema é dada pelo seguinte "algoritmo" recursivo:

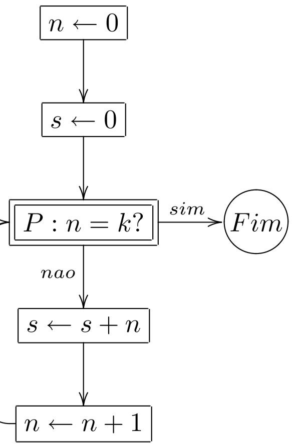
- se $n = 1$ então basta mover o (único) disco e terminar;
- se $n > 1$ então...
  - mover os primeiros $n - 1$ discos para o pilar intermédio;
  - mover o último disco para o pilar final;
  - por fim, mover os $n - 1$ discos para o pilar final.

a) Encontre uma fórmula de recorrência para o número T_n de movimentos necessários para mover uma torre com n discos.

b) Calcule (usando a fórmula de recorrência) alguns valores de T_n (ex.: $n = 1, 2, 3, 4, 5$). Consegue "adivinhar" uma expressão (sem recorrência) para T_n?

c) Usando indução finita, prove que a expressão que encontrou é válida.

Exercício 1.14 O diagrama seguinte representa um excerto de um algoritmo de um programa de computador. Mostre, por indução, que no ponto P é sempre $n =$ número de "voltas" já dadas ao ciclo, e $s = 1 + 2 + \cdots + (n-1)$ e que, portanto, à saída é $s = 1 + 2 + \cdots + (k-1)$.



[*Nota:* A interpretação dada a $x \leftarrow y$ é *calcular o valor de* y *e atribuí-lo a* x. As "caixas" com bordo duplo correspondem a testes de condições, *i.e.*, *se* $n = k$ *então...*]

Exercício 1.15 Considere o conjunto das *palavras* em que só podem ocorrer as letras M, I, U, e construidas pelas seguintes regras:

- MI é uma palavra.
- se xI é uma palavra, então xIU é uma palavra.
- se Mx é uma palavra, então Mxx é uma palavra.
- se $xIIIy$ é uma palavra, então xUy é uma palavra.
- se $xUUy$ é uma palavra, então xy é uma palavra.

onde x, y são sequências quaisquer de M's, I's e U's.

a) Verifique que $MUIUI$, $MUIIU$ e $MUUII$ são palavras.

b) *Será MU palavra?* — *i.e.*, conseguir-se-à "produzir" MU usando as regras anteriores?

   [*Sugestão:* Mostre, por indução, que o número de ocorrências da letra I em qualquer palavra nunca é múltiplo de 3. Que se pode concluir?...]

Exercício 1.16 Seja L o conjunto de palavras assim definidas:

(i) `a` e `b` são palavras.

(ii) se S é uma palavra então `aa`S e `bb`S também são palavras.

(iii) as palavras de L são todas (e apenas) as que resultam de (i) e (ii).

a) Mostrar que qualquer palavra de L tem ou um número par de `a`'s e ímpar de `b`'s, ou um número par de `b`'s e ímpar de `a`'s.

b) Mostrar que L pode ser descrito como o conjunto das palavras de `a`'s ou `b`'s que são constituidas por blocos de `a`'s ou/e blocos de `b`'s, sendo par o número de letras em cada bloco, excepto no último (sufixo).

Exercício 1.17 Seja L o conjunto de *expressões* em que só ocorrem os símbolos $\{id, (,), +, -, *, /\}$, assim definidas:

- id é uma expressão.
- se A e B são expressões, então $(A+B), (A-B), (A*B)$ e (A/B) também o são.

Mostre que em qualquer expressão de L:

a) o número de id's excede em 1 o número total de operadores ($+, -, *$ e $/$).

b) o número de parêntesis abertos é igual ao número de parêntesis fechados

c) o número de parêntesis (abertos ou fechados) é o dobro de número de operadores.

d) em qualquer prefixo duma expressão, o número de parêntesis fechados não excede o número de parêntesis abertos.

Exercício 1.18 Mostre que $(2m+1)^n$ é ímpar $\forall n \geq 0, \forall m \geq 0$.
Sugestão: Pode usar indução sobre a variavel n ou m conforme for mais adequado.

Exercício 1.19 O que está *errado* na seguinte "prova" por indução?

"*Teorema:(?)* Seja a um número positivo. Então, para todo $n \geq 1$, tem-se $a^{n-1} = 1$.

Prova: Para $n = 1$ temos $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$.

Por indução, assumindo que o teorema é válido para $1, 2, \ldots, n$, temos

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1;$$

logo o teorema vale para $n+1$, e fica provado por indução."

[*Sugestão:* Tente "reproduzir" a implicação $P(1) \Rightarrow P(2)$ manualmente...]

Exercício 1.20 O que está *errado* na seguinte "prova" por indução?

"*Teorema:(?)* Se A é um conjunto de n bolas com pelo menos uma bola branca, então todas as bolas de A são brancas, qualquer que seja n positivo.

Prova por indução:

(i) O caso $n = 1$ é trivial, uma vez que o conjunto tem alguma bola branca e o conjunto tem apenas uma bola. Logo, se $n = 1$ então todas as bolas no conjunto são brancas. (cqd) (ii) São brancas todas as bolas num conjunto de k bolas com pelo menos uma bola branca $\Longrightarrow$ São brancas todas as bolas num conjunto de $k+1$ bolas com pelo menos uma bola branca (qualquer que seja $k \geq 1$)

Com efeito, seja $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$ um conjunto com $k+1$ bolas e nas condições do problema (isto é, com pelo menos uma bola branca). Sem perda de generalidade pode supor-se que a bola b_1 é branca (se não for renumera-se as bolas outra vez de forma que b_1 seja branca). Considerem-se os conjuntos $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\} \backslash \{b_{k+1}\}$ e $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\} \backslash \{b_k\}$. O primeiro tem apenas k elementos, e tem b_1 (bola branca). Logo, pela hipótese de indução $b_1, \ldots, b_k$ são brancas. Também, $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\} \backslash \{b_k\}$ tem apenas k elementos, e tem b_1 (bola branca). Portanto $b_1, \ldots b_{k-1}, b_{k+1}$ são bolas brancas. Concluiu-se que todas as bolas em $\{b_1, \ldots, b_k, b_{k+1}\}$ são brancas.

Mostrámos que as duas condições (i) e (ii) do princípio de indução são satisfeitas. Segue por tal princípio a proposição que queriamos mostrar.

Corolário: Qualquer objecto é branco. (Em particular, todas as bolas são brancas)"

2 Conjuntos

Exercício 2.1 Prove que:

(i) $\{x \in R : \sqrt{x} = x - 2\} = \{4\}$

(ii) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$

(iii) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

(iv) $\mid 2^A \mid = 2^{|A|}$,onde 2^A é o conjunto das partes de A

Exercício 2.2 Sendo $A = \{a, \{b\}\}$ e $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ determine $A \cap B$, $A \cup B$, 2^A, $B \cap 2^A$, $A \times B$ e $A \times B \cap B \times A$.

Um conjunto A é *fechado* para um operação binária $\oplus$ se para todo o par de elementos x e y de A, $x \oplus y \in A$.

Exercício 2.3 (i) Dos seguintes conjuntos indique quais são fechados para a adição: $\{0\}$, $\{0, 1\}$, N, Z, $\{x \in N :$ x é par$\}$ e $\{x \in N :$ x é ímpar$\}$.

(ii) Dos seguintes conjuntos indique quais são fechados para a raiz quadrada: $\{0, 1\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{x \in R : 0 < x < 1\}$ e $\{x \in R : x \geq 1\}$.

Dada uma propriedade P sobre conjuntos, um conjunto A é o *menor* conjunto com a propriedade P se A tem a propriedade P e se A' tem a propriedade P então $A \subseteq A'$. O *fecho* dum conjunto A para uma operação $\oplus$ é o menor conjunto que contém A e é fechado para $\oplus$.

Exercício 2.4 Indique o fecho dos seguintes conjuntos para a adição: $\{1\}$, $\{0, 2\}$ e $\{x \in N :$ xé ímpar$\}$.

Exercício 2.5 Indique se existe menor conjunto para as seguintes propriedades ou fecho para a operação:

(i) O cardinal de A é n.

(ii) O cardinal de A é infinito

(iii)

Exercício 2.6 Sopunha que $\oplus$ é uma operação binária. Prove que o fecho de A para $\oplus$ é dado por $\bigcap_{A \subseteq B} B$ e cada B é fechado para $\oplus$. Se $\oplus$ é associativa então o fecho de A, se exixtir, é dado por: $\bigcup_{i \geq 1} A^i$ onde $A^1 = A$ e $A^{k+1} = \{x \oplus y : x \in A \text{ e } y \in A^k\}$, se $\oplus$ é binária ou $A^{k+1} = \{\oplus x : x \in A^k\}$ se $\oplus$ é unária.

Exercício 2.7 Considere no conjunto das pessoas as relações de parentesco. Seja I a relação identidade.

(i) determine as propriedades das relações *é-irmã*, *é-antepassado*, *é descendente*, *é-filho* e *é-avó*.

(ii) calcule *é-filhoé-mãe*$\cap$*é-filhoé-pai*$\setminus I$, *é-antepassado*$^{-1}$*é-antepassado*, *é-mãeé-paié-pai*

(iii) qual o fecho transitivo de *é-filho(a)* ? e o fecho transitivo e reflexivo?

O fecho reflexivo e transitivo duma relação binária R designa-se por $R^\star$. O *fecho de equivalência* duma relação R é o seu fecho reflexivo, simétrico e transitivo.

Exercício 2.8 Prove que o fecho de equivalência de R é $(R \cup R^{-1})^\star$.

Exercício 2.9 Sendo R e S duas relações binárias. Prove que:

(i) $(R \cup S)^\star = R^\star(SR^\star)^\star$

(ii) $(R \cup S)^\star = S^\star(RS^\star)^\star$

Exercícios de Tópicos de Matemática Discreta

95/96

Folha nº 2

3 Conjuntos

Exercício 3.1 Sendo A e B conjuntos prove que:

(i) $\{x \in R : \sqrt{x} = x - 2\} = \{4\}$

(ii) $A \setminus B = A \cap \overline{B}$

(iii) $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$

Exercício 3.2 Sendo $A = \{a, \{b\}\}$ e $B = \{a, b, \{a, b\}\}$ determine $A \cap B$, $A \cup B$, $\mathcal{P}(A)$, $B \cap \mathcal{P}(A)$, $A \times B$ e $(A \times B) \cap (B \times A)$.

4 Relações Binárias

Exercício 4.1 Quais dos seguintes conjuntos são relações binárias em $\mathbb{N}$? E em $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$?

$$
\begin{array}{ll}
A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \ m+n \text{ é par}\} & B = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \ m+n \text{ é ímpar}\} \\
C = \{\} & D = \{m \in \mathbb{N} \mid \ m \text{ é potência de } 2\} \\
E = \{1,3,4,7,10\} & F = \{(1,1),(1,2),(2,1),(3,3)\} \\
G = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid \exists p,q,x \in \mathbb{N} : \ m = x^p \wedge n = x^q\} &
\end{array}
$$

Exercício 4.2 Sendo $X = \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}, \{\{\emptyset\}\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\{\emptyset\}\}\}\}$, determine as seguintes relações:

a) $\{(x,y) \mid x,\, y \in X \text{ e } x = y\}$

b) $\{(x,y) \mid x,\, y \in X \text{ e } x \subseteq y\}$

c) $\{(x,y) \mid x,\, y \in X \text{ e } x \subset y\}$

d) $\{(x,y) \mid x,\, y \in X \text{ e } y = \mathcal{P}(x)\}$

Exercício 4.3 Seja $A = \{1,2,3,4,5\}$ e $B = \{\{1,2\},\{1,3,4\},\{5\}\}$.

(i) Seja R a relação binária de A em B formada pelos pares (a,X) tais que $a \in X$. Escreva em extensão RR^{-1}; calcule a a sua matriz a partir da matriz de R e determine as suas propriedades por análise da matriz calculada — que "interpretação" pode dar à relação RR^{-1}?

(ii) Dê um exemplo (ou prove que não existe) de uma relação binária de A em B que seja uma função:

(a) injectiva e não sobrejectiva

(b) sobrejectiva e não injectiva

(c) bijectiva

Exercício 4.4 Comente a validade ou falsidade das afirmações seguintes:

a) Se $f \subseteq A \times B$ e $g \subseteq B \times C$ são funções então fg é uma função;

b) A relação RR^{-1} é a identidade em A se e só se $R \subseteq A \times B$ é uma função bijectiva.

c) Se $\emptyset \neq f \subseteq A \times B$ e $\emptyset \neq g \subseteq B \times C$ então $fg \neq \emptyset$.

d) Se $f \subseteq A \times B$, $g \subseteq B \times C$ e fg é uma função então f e g são funções;

e) Não é condição necessária para que fg seja uma função sobrejectiva que f seja uma função sobrejectiva.

f) É condição suficiente para que fg seja uma função sobrejectiva que f seja uma função e g seja uma função sobrejectiva.

g) Se $f \subseteq A \times B$ ou $g \subseteq B \times C$ são vazias então fg é vazia.

h) A relação RR^{-1} é a identidade em A e $R^{-1}R$ é a identidade em B se e só se $R \subseteq A \times B$ é uma função bijectiva.

Exercício 4.5 Mostre que se $R \subseteq A \times B$ e $S \subseteq B \times C$ então $(RS)^{-1} = S^{-1}R^{-1}$.

Exercício 4.6 Considere os conjuntos do exercício 4.1 que são relações.

(i) Indique quais as suas propriedades.

(ii) Para as relações que são de equivalência, determine as classes de equivalência.

(iii) Restringindo as relações em $\mathbb{N}$ a $\{1, 2, \ldots, 10\}$, represente essas restrições por grafos.

Exercício 4.7 Dado o conjunto $A = \{1, 2, \ldots, n\}$ e $R \subseteq A \times A$, pode associar-se a R uma matriz $M_{n\times n}$ tal que: $M_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } (i,j) \in R \\ 0 & \text{se } (i,j) \notin R \end{cases}$

(i) Caracterize a matriz M no caso de R ser reflexiva, ou simétrica ou anti-simétrica ou uma função.

(ii) Relacione o produto $M \times M$ com a composição de RR

(iii) Descreva um algoritmo que permita identificar as propriedades de R – reflexividade, simetria, anti-simetria e transitividade – a partir da sua matriz.

Exercício 4.8 Determine as propriedades das seguintes relações definidas no conjunto dos inteiros positivos:

(i) $\{(m, n) |\ m \text{ é múltiplo de } n\}$

(ii) $\{(m, n) |\ m + n \geq 50\}$

(iii) $\{(m, n) |\ mn \text{ é par}\}$

(iv) $\{(m, n) |\ m \text{ é potência de } n\}$

(v) $\{(m, n) |\ m + n$ é múltiplo de 3$\}$

(vi) $\{(m, n) |\ m > n\}$

(vii) $\{(m, n) |\ m$ e n são termos da sucessão de Fibonacci$\}$

(viii) $\{(m, n) |\ m$ ou n são termos da sucessão de Fibonacci$\}$

(ix) $\{(m, n) |\ m = n$ ou m, n são primos entre si$\}$

(x) $\{(m, n) |\ m$ é metade, o dobro ou igual a $n\}$

Exercício 4.9 a) Seja A um conjunto não vazio. Mostrar que o conjunto vazio considerado como relação em A é não reflexivo mas é simétrico e transitivo.

b) Seja I_A a relação identidade num conjunto não vazio A. Mostrar que:

(i) uma relação R em A é antissimétrica se e só se $I_A \supseteq R \cap R^{-1}$

(ii) uma relação R em A é reflexiva se e só se $R \supseteq I_A$

c) Seja R uma relação definida num conjunto. A relação $R \cup R^{-1}$ é simétrica?

d) Quais das propriedades das relações definidas num conjunto são preservadas pela composição de relações?

Exercício 4.10 Seja A um conjunto não vazio e sejam R e S relações definidas em A. Comente a validade das seguintes afirmações (isto é, prove a veracidade ou a falsidade de cada uma delas):

a) É condição suficiente para que $R \cap S$ seja reflexiva que R ou S sejam reflexivas.

b) A condição anterior não é necessária.

c) É condição suficiente para que $R \cap S$ seja simétrica que R e S sejam simétricas.

d) A condição anterior não é necessária.

e) É condição suficiente para que $R \cap S$ seja antissimétrica que R e S sejam antissimétricas.

f) A condição anterior não é necessária.

g) É condição suficiente para que $R \cap S$ seja transitiva que R ou S sejam transitivas.

h) A condição anterior não é necessária.

Exercício 4.11 Exercício análogo ao anterior substituindo $R \cap S$ por $R \cup S$ no enunciado.

Exercício 4.12 Exercício análogo ao anterior substituindo $R \cap S$ por RS.

Exercício 4.13 Exercícios análogos aos anteriores substituindo "R e S"por "R ou S"(e vice-versa).

Exercício 4.14 Sejam $R, S \subseteq A \times A$, duas relações binárias definidas num mesmo conjunto A.

a) Supondo que R e S são transitivas, averigue se $R \cap S$ e $R \cup S$ são necessariamente relações transitivas (em caso afirmativo, prove que assim o é; caso contrário, apresente um contra-exemplo).

b) Supondo agora que R e S são relações reflexivas (respectivamente, simétricas e anti-simétricas) averigue a reflexividade (respectivamente, simetria e anti-simetria) das relações $R \cap S$ e $R \cup S$.

Exercício 4.15 Seja $R \subseteq A \times A$ uma qualquer relação binária em A. Mostre que existe sempre o *fecho transitivo* de R, isto é, uma relação $R_t \subseteq A \times A$, tal que:

- $R \subseteq R_t$
- R_t é transitiva
- R_t é a relação mínima (no sentido de inclusão de conjuntos) que tem essas duas propriedades.

Exercício 4.16 Seja $R \subseteq A \times A$, uma relação binária definida num conjunto A. Mostre que

$$R^t = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n$$

onde R^t é a relação *fecho transitivo* de R, e $R^i = R \cdot R \cdot \cdots \cdot R$ (i vezes) é a relação composta i-vezes de R.

Exercício 4.17 Determine o *fecho transitivo* das relações do exercício 4.8. Nos casos em que o fecho transitivo for uma relação de equivalência, determine as suas classes de equivalência.

Exercício 4.18 Considere no conjunto das pessoas as relações de parentesco. Seja I a relação identidade nesse conjunto.

a) Determine as propriedades das relações *é-irmã*, *é-antepassado*, *é-descendente*, *é-filho* e *é-avó*.

b) calcule (*é-filhoé-mãe*)$\cup$(*é-filhoé-pai*)$\backslash$(*é-irmão*$\cup$ I) e *é-antepassado*$^{-1}$*é-antepassado*

c) qual o fecho transitivo de *é-filho*$\cup$*é-filha* ? e o fecho transitivo e reflexivo?

Exercício 4.19 O fecho reflexivo e transitivo duma relação binária R designa-se por $R^\star$. O *fecho de equivalência* duma relação R é o seu fecho reflexivo, simétrico e transitivo. Prove que o fecho de equivalência de R é $(R \cup R^{-1})^\star$.

Exercício 4.20 [$\star$] Sendo R e S duas relações binárias. Prove que:

(i) $(R \cup S)^\star = R^\star(SR^\star)^\star$

(ii) $(R \cup S)^\star = S^\star(RS^\star)^\star$

Exercício 4.21 Suponha $A = \{1, 2, \ldots, n\}$. Usando a matriz associada a uma relação $R \subseteq A \times A$ escreva algoritmos para determinar :

(i) o fecho reflexivo de R

(ii) o fecho simétrico de R

(iii) o fecho transitivo de R, usando o seguinte algoritmo de Floyd:

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ faça $R \leftarrow R \cup \{(i, j) : (i, k) \in R \wedge (k, j) \in R\}$

Exercício 4.22 Seja L= $\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$ um conjunto de línguas, seja $P = \{i_1, i_2, i_3, \ldots, i_{10}\}$ um conjunto de indivíduos, e seja

$$\begin{aligned} LF &= \{(i_1, \{a_1, a_2\}), (i_2, \{a_2, a_3\}), (i_3, \{a_1, a_3\}), (i_4, \{a_4, a_5\}), (i_5, \{a_4\}), \\ &\quad (i_6, \{a_4, a_5\}), (i_7, \{a_5\}), (i_8, \{a_1\}), (i_9, \{a_2\}), (i_{10}, \{a_3\})\} \end{aligned}$$

a relação das línguas de L faladas por cada individuo de P. Seja R a relação definida em P por: para quaisquer x e y em P,

$$xRy \text{ sse "} x \text{ e } y \text{ falam uma mesma língua de } L\text{"}$$

a) Determine as propriedades de R.

b) Represente R por um grafo não dirigido (sem lacetes).

c) Determine todos os subconjuntos C de P que satisfazem (simultaneamente) as condições seguintes:

   (i) $C \neq \emptyset$

   (ii) $\forall x, y \in C.\ xRy$

   (iii) $\forall x \in P \setminus C\ \exists y \in C.\ (x, y) \in R$

d) Mostre que o fecho transitivo de R (denotado por R^+) é uma relação de equivalência e determine as suas classes de equivalência.

e) Mostre que quaisquer subconjuntos nas condições descritas em c) são subconjuntos duma mesma classe de R^+ se e só se são não disjuntos (dois a dois). Como é que a operação de fecho transitivo afectou tais conjuntos?

Exercício 4.23 [$\star$] Seja R uma relação de compatibilidade definida num conjunto (não vazio) A. Seja C o conjunto dos subconjuntos C de A que verificam as condições seguintes:

(i) $C \neq \emptyset$

(ii) $\forall x, y \in C.\ xRy$

(iii) $\forall x \in A \setminus C\ \exists y \in C.\ (x, y) \in R$

Seja $\mathcal{CE}$ o conjunto dos subconjuntos de A obtidos por reunião de todos os elementos de C não disjuntos dois a dois. Mostre que:

a) O fecho transitivo de R é sempre uma relação de equivalência.; e que

b) $\mathcal{CE}$ é o conjunto das classes de equivalência do fecho transitivo de R.

Exercício 4.24 Seja R uma relação binária definida num conjunto A finito e não vazio; seja S o subconjunto de $A \times A$ cujos elementos satisfazem as condições seguintes:

$$(a, b) \in R \ \Rightarrow\ (a, b) \in S \qquad \text{e} \qquad (a, b) \in S \wedge (c, b) \in S \ \Rightarrow\ (a, c) \in S$$

a) Calcule a relação S associada a $R = \{(0, 1), (1, 2), (3, 1), (1, 1)\}$.

b) No caso geral, que propriedades tem S?

c) Que propriedades de S são "herdadas"de R?

Exercício 4.25 [$\star$] Sejam R e S duas relações de equivalência num conjunto A.

a) Mostrar que a composta RS é de equivalência se e só se $RS = SR$.

b) Dar um exemplo em que RS e SR são iguais e um exemplo em que são diferentes.

Exercício 4.26 Seja A um conjunto finito, e seja q uma permutação de A (isto é, uma bijecção de A sobre si próprio). Seja R_q a relação de equivalência definida em A por:

$$xR_qy \quad \text{sse} \quad \forall x, y \in A\ \exists k \in \mathbb{N}_0\ q^k(x) = y$$

sendo q^k a composição de q com q^{k-1} se $k \geq 2$, e $q^0 = I_A$ (identidade em A).

a) Dê exemplo de um conjunto A de 7 elementos, e de funções q nas condições do problema. Para cada exemplo, determine as classes de equivalência de R_q

b) [$\star$] Para o caso geral (isto é, A conjunto finito qualquer, e q uma qualquer permutação de A): Mostre que R_q é uma relação de equivalência e descreva as suas classes de equivalência.

Exercícios de Tópicos de Matemática Discreta

95/96

Folha nº 3

5 Relações de Ordem Parcial

Numa relação de ordem parcial $\preceq$ em A e para $S \subseteq A$, definimos:

Majorante: m é majorante de S sse $\forall a \in S : a \preceq m$

Minorante: m é minorante de S sse $\forall a \in S : m \preceq a$

Supremo: s é supremo de S sse s é majorante de S e para qualquer s' majorante de S temos $s \preceq s'$. Se $s \in S$, então s designa-se por **máximo**.

Ínfimo: i é ínfimo de S sse i é minorante de S e para qualquer i' minorante de S temos $i' \preceq i$.Se $s \in S$, então s designa-se por **mínimo**.

Exercício 5.1 Desenhe os diagramas de Hasse dos seguintes conjuntos parcialmente ordenados e indique (caso existam) o supremo e ínfimo:

(i) $(2^U, \subseteq)$ onde $U = \{1, 2, 3, 4\}$

(ii) $(X, \preceq)$, onde X é conjunto dos divisores de 24, e $\preceq$ a relação de divisibilidade ($x \preceq y$ sse x divide y).

(iii) $(X, \preceq)$, onde $X = \{3, 6, 9, 20, 15, 20, 30\}$ e $\preceq$ é a relação de divisibilidade.

(iv) $(L, \preceq)$, onde $L = \{\varepsilon, a, b, aa, bb, ab, ba\}$ e $x \preceq y$ sse x é prefixo de y.

(v) $(F, \preceq)$, onde F é o conjunto de todas as funções parciais de $\{a, b\}$ em $\{0, 1, 2\}$, onde $f \preceq g$ se $dom(f) \subseteq dom(g)$ e $\forall x \in dom(f)$, $f(x) = g(x)$.

Exercício 5.2 Mostre que:

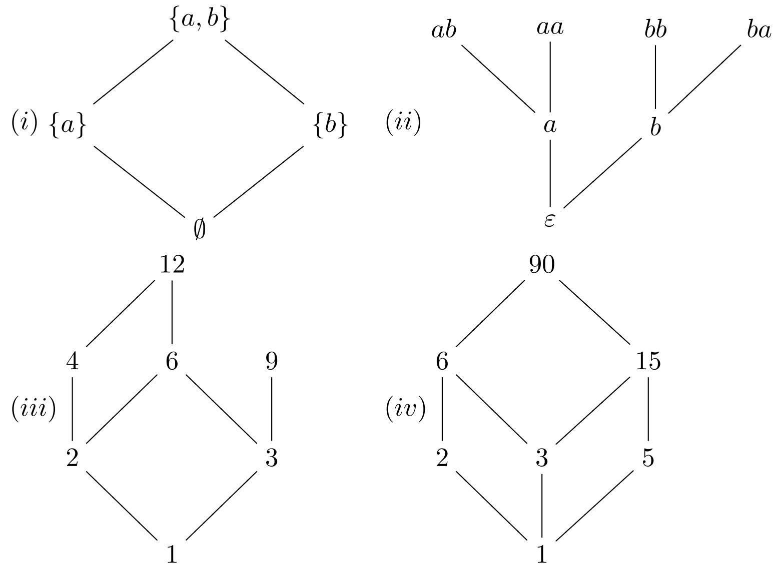
(i) se R é uma ordem parcial em X, então R^{-1} também é uma ordem parcial em X.

(ii) se (A, R_1) e (B, R_2) são ordens parciais então $(A \times B, R)$ é uma ordem parcial, onde $(a, b)R(x, y)$ sse aR_1x e bR_2y.

Exercício 5.3 Indique quais das seguintes relações (definidas num qualquer conjunto com 5 elementos e representadas por matrizes) são relações de ordem parcial:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Exercício 5.4 Determine as matrizes associadas a cada uma das relações de ordem representadas.



Exercício 5.5 Seja Σ o conjunto {a,b} e seja R a seguinte relação definida em $\Sigma^\star$, conjunto de sequências finitas de elementos de Σ: $\alpha \; R \; \beta$ sse α é uma subsequência de β (isto é , $\exists \gamma \in \Sigma^\star, \delta \in \Sigma^\star, \beta = \gamma\alpha\delta$).

(i) Mostre que se trata de uma relação de ordem parcial.

(ii) Indique alguns majorantes, minorantes, supremos ou ínfimos (caso existam) para os seguintes conjuntos de sequências: $\{\varepsilon, aba\}$; $\{ab, ba\}$; $\{bbb, aaa\}$

(iii) Existem máximo e mínimos no conjunto total?

(iv) Considere no mesmo conjunto as seguintes relações:

  (i) $\alpha \; R_1 \; \beta$ sse $\mid \alpha \mid \leq \mid \beta \mid$, onde $\mid x \mid$ designa o comprimento de x.

  (ii) $\alpha \; R_2 \; \beta$ sse as letras de α ocorrem em β

  (iii) $\alpha \; R' \; \beta$ sse $\alpha = \beta$ ou α precede β na ordem do dicionário (*ordem lexicográfica*

  Indique as que são relações de ordem parcial e para essas responda às questões das alíneas anteriores.

Exercício 5.6 [**] Sendo A um conjunto finito com n elementos e $(A, \preceq)$ uma ordem parcial, existe sempre uma função injectiva tal que:

$$f : A \rightarrow \{1, \ldots, n\} \text{ tal que: } \forall x \in A,\ y \in A\ , x \preceq y\ \Rightarrow f(x) \leq f(y)$$

Descreva um algoritmo para obter essa função. Sugestão: Para cada $x \in A$, construa sucessivamente um conjunto B, que representa em cada passo o conjunto onde f está definida (no início $B = \emptyset$), e defina

$$f(x) = 1 + max\{f(y) \mid y \in B \text{ e } y \preceq x\}$$

Deve alterar convenientemente os valores de f para $z \in B$ e $x \preceq z$ e incluir x em B.

Qual a relação desta funcão com o desenho do diagrama de Hasse?

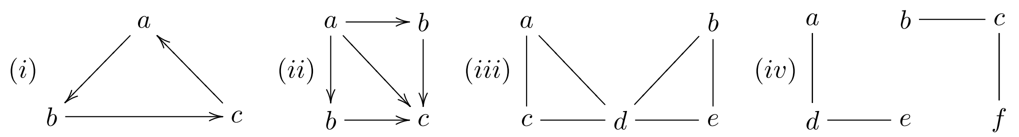
Exercício 5.7 [**] Sendo R uma relação de ordem num conjunto finito A, mostre que o seguinte algorítmo permite obter a relação $S \subseteq R$, cujo fecho transitivo é R e S é mínima (no sentido de que qualquer conjunto cujo fecho transitivo seja R tem de conter S).

> $S \leftarrow R$;
> **enquanto** existir a, b e $c \in A$ tal que $\{(a,b),(b,c),(a,c)\} \subseteq R$ e $(a,c) \in S$
> **faça** $S \leftarrow S - \{(a,c)\}$

Em particular, mostre que S resultante é unica (i.e., independente da ordem de escolha para os a, b, c sucessivos).

6 Grafos e Relações Binárias

Exercício 6.1



a) Para cada um dos grafos (dirigidos e não-dirigidos) representados na figura acima, indique qual o seu conjunto de nós e de arcos (ou ramos).

b) Nos grafos acima representados indique:

   (i) um ciclo (dirigido e não-dirigido);

   (ii) um grafo conexo (dirigido e não-dirigido);

   (iii) um grafo não conexo;

   (iv) um grafo dirigido fortemente conexo e outro que o não seja;

   (v) se existe algum grafo que seja uma árvore, justificando.

Exercício 6.2 Seja A um conjunto finito de números naturais. Considere nesse conjunto a relação *divide* (x divide y sse existe algum natural p tal que $xp = y$).

(i) Considere o grafo da relação *divide* definida em $A = \{k \in N : k \text{ divide } 30\}$. Para cada vértice determine o conjunto de vértices acessíveis desse vértice. Será o grafo fortemente conexo? E conexo, simplesmente?

(ii) Em geral, como deveria ser o conjunto A para que o grafo fosse fortemente conexo (*i.e.*, tal que todo o vértice é acessível de qualquer um dos outros)?

(iii) Suponha que o conjunto A está ordenado por ordem crescente, e que qualquer vértice é acessível de todos os *não superiores*. O que se pode concluir sobre o conjunto A?

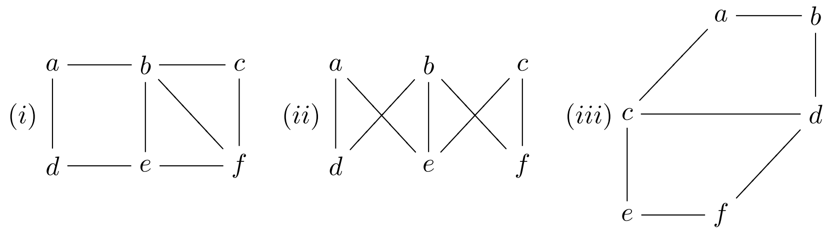
Exercício 6.3 Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido. Considere uma relação R em V (conjunto dos vértices do grafo) definida por "xRy sse $x = y$ ou existe um caminho no grafo de x para y".

(i) Mostre que R é uma relação de equivalência.

(ii) Mostre que cada classe de equivalência de R é um *subgrafo conexo* de G. Mostre, ainda, que cada classe é um subgrafo conexo *máximo*, *i.e.*, se lhe juntarmos mais um qualquer vértice obtemos um subgrafo de G que é não conexo.

(iii) Como poderia exprimir a propriedade "G é um grafo conexo" em termos de propriedades da relação R e/ou das suas classes de equivalência?

Exercício 6.4 Para cada um dos seguintes grafos (não-dirigidos):



encontre ou mostre que não existe...

- um caminho entre a e f que não repete nenhum vértice;
- um caminho entre a e f que não repete nenhum ramo;
- um caminho entre a e f que repete algum ramo;
- um caminho entre a e f que repete algum vértice

Exercício 6.5 Dado um grafo não dirigido $G(V, E)$ construa-se o grafo $G'(V', E')$ tal que $V' = E$ e $((a, b), (c, d)) \in E'$ sse $b = c$.

a) Dê exemplos de grafos G' associados a grafos G.

b) Relacione as propriedades de G' com as propriedades de G (relativas a caminhos, ciclos, conectividade).

Exercício 6.6 Considere o conjunto dos paises da União Europeia, UE=\{Portugal, Espanha, França, Alemanha, Bélgica, Luxemburgo, Holanda, Itália, Grécia, Austria, Reino Unido, Irlanda, Suécia, Dinamarca, Filândia\} e a relação Φ definida em UE:

$$x \Phi y \quad \leftrightarrow \quad x \text{ tem fronteira terrestre com } y$$

a) Determine a relação Φ em extensão e as suas propriedades.

b) Descreva Φ por grafo não-dirigido G_Φ e desenhe-o.

c) Para cada nó determina o conjunto de vértices acessíveis. Quais as componentes conexas de G_Φ?

Exercício 6.7 Um grafo não dirigido $G = (V, E)$ diz-se *bipartido* sse existe uma partição $\{V_1, V_2\}$ de V tal que para todo $(a, b) \in E$ se tem $a \in V_1 \wedge b \in V_2$ ou vice-versa, $a \in V_2 \wedge b \in V_1$.

Mostre que um grafo bipartido só pode ter ciclos de comprimento par.

Exercício 6.8 O algoritmo seguinte determina o conjunto das componentes conexas dum grafo não dirigido, $G = (V, E)$, $\mathcal{C}(G)$. Suponha que os ramos de E estão numerados $e_1, \ldots e_{|E|}$. O algoritmo constrói uma sucessão de grafos $G_0, G_1, \ldots, G_{|E|}$ do seguinte modo:

- $G_0 = (V, \emptyset)$ e então $\mathcal{C}(G_0) = \{\{v_1\}, \ldots, \{v_{|V|}\}\}$.

- Supondo que $G_i = (V, \{e_1, \ldots, e_i\})$ e que $\mathcal{C}(G_i)$ é o conjunto das suas componentes conexas, constrói-se G_{i+1} adicionando o ramo $e_{i+1} =< u, v >$, $G_{i+1} = (V, \{e_1, \ldots, e_i, e_{i+1}\})$ e

  1. Se u e v estão na mesma componente conexa de G_i ,$\mathcal{C}(G_{i+1}) = \mathcal{C}(G_i)$
  2. Se u e v estão em componentes conexas distintas de G_i, respectivamente C_u e C_v, então $\mathcal{C}(G_{i+1}) = (\mathcal{C}(G_i) \setminus \{C_u, C_v\}) \cup \{C_u \cup C_v\}$

Mostre que $\mathcal{C}(G) = \mathcal{C}(G_{|E|})$, isto é , que o algoritmo está correcto.

Exercício 6.9 Mostre que num grafo não-dirigido sem lacetes, *a soma dos graus dos vértices é o dobro do número de ramos.*

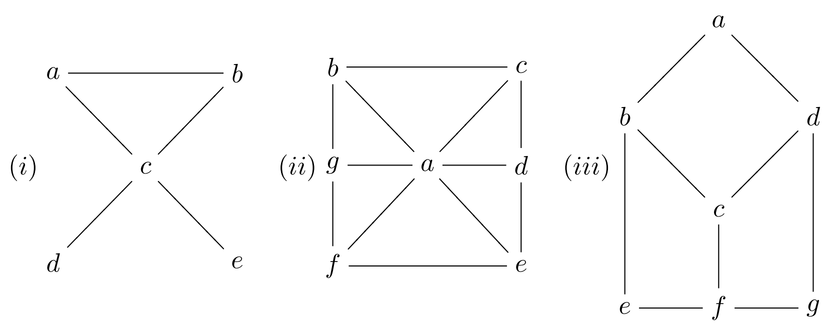
Exercício 6.10 a) Desenhe um grafo não dirigido, com 5 vértices e número de ramos diferente de 5, sem levantar o lápis do papel nem passar duas vezes pelo mesmo ramo, devendo os pontos inicial e final do desenho coincidir.

b) Mesmo enunciado que na alínea anterior mas supondo que 5 dos ramos formam um pentágono. Prove que só existe um grafo nessas condições.

Exercício 6.11 Um *caminho euleriano* num grafo não-dirigido é um caminho que passa por cada ramo do grafo exactamente uma vez. Um *caminho hamiltoniano* é um caminho que passa por cada vértice do grafo exactamente uma vez.

Tais caminhos dizem-se ciclos eulerianos (ou hamiltonianos, respectivamente) se começarem e acabarem num mesmo vértice.

Nos grafos seguintes encontre caminhos eulerianos e hamiltonianos, ou justifique se tal não for possível. Desses caminhos, indique quais são ciclos.



Exercício 6.12 [$\star\star$] Mostre que um grafo não-dirigido G tem um ciclo (caminho) eulariano sse é conexo e todos os seus vértices tiverem grau par (todos excepto dois).

Exercício 6.13 Um multigrafo G diz-se completo se entre cada par de vértices de G existe pelo menos um arco.

a) Mostre que é condição suficiente para que um multigrafo G tenha um caminho hamiltoneano que G seja completo.

b) Mostre que o grafo dirigido da relação

$$R = \{(1, 2), (1, 4), (1, 5), (2, 6), (3, 2), (3, 4), (3, 5), (5, 2), (5, 4), (6, 1), (6, 3), (6, 5)\}$$

definida em $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ não é completo e tem um caminho hamiltoneano. Conclua que a condição em a) não é necessária.

Exercício 6.14 Mostre que *uma árvore têm sempre pelo menos dois vértices de grau 1.* [*Sugestão:* recorde que uma árvore têm menos um ramo do que vertices e considere o resultado do exercício 6.9. . .]

Exercício 6.15 Recorde que um grafo dirigido diz-se *conexo* (ou simplesmente conexo) se o grafo não-dirigido que lhe está associado é conexo; dito de outra forma, se existe um *caminho não-dirigido* entre quaisquer dois vértices. Um grafo dirigido diz-se *fortemente conexo* se entre quaisquer dois vértices existe um *caminho dirigido*.

Mostre que um grafo dirigido sem vértices isolados é fortemente conexo sse tiver um ciclo que inclui todos os ramos do grafo (uma ou mais vezes).

Exercício 6.16 Suponha dado um grafo dirigido (V, E) por uma *matriz quadrada* M de dimensão n (onde $V = \{1, 2 \dots n\}$), com $M_{ij} = 1$ ou 0 conforme $(i, j) \in E$ ou $(i, j) \notin E$, respectivamente.

Descreva algoritmos para:

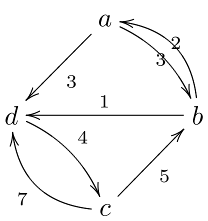
(i) indicar se existe caminho (dirigido) de a para b, sendo a e b dois vértices dados;

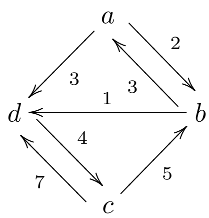
(ii) indicar se existe caminho não-dirigido (*i.e.*, no grafo não-dirigido associado) entre dois vértices dados;

(iii) indicar, caso exista, qual o comprimento do caminho mais curto (em número de arcos) de a para b, sendo a e b vértices dados;

(iv) indicar se o grafo é conexo / fortemente conexo.

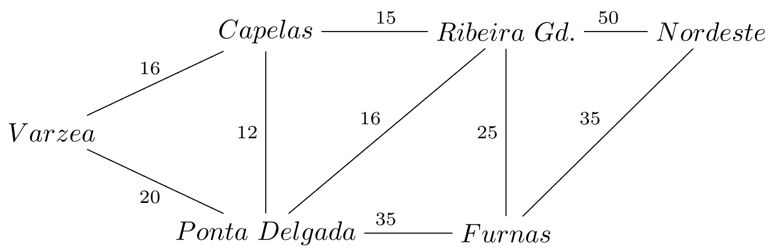
Exercício 6.17





Considerando o grafo acima determina a matriz das distâncias mínimas associada.

Exercício 6.18 No grafo seguinte indicam-se as distâncias por estrada (em km) entre algumas localidades da ilha de S.Miguel, nos Açores.



a) Escreve a matriz das distâncias associada.

b) Calcula a matriz das distâncias mínimas associada.

Exercício 6.19 Existe um certo número de tarefas a serem realizadas. Representam-se as dependências entre elas por um grafo dirigido do seguinte modo:

- cada nó representa um tarefa e tem associado um tempo de realização;
- se a tarefa y só pode começar a ser executada depois de acabada a tarefa x (*i.e.*, se y *depende de* x), existe no grafo um ramo (x, y).

(i) Que propriedades tem a relação binária (entre tarefas) representada pelo grafo?

(ii) Como calcularia o tempo mínimo para executar *todas* as tarefas? Exprima esse tempo em função dos tempos das tarefas no grafo. [*Sugestão:* Defina o tempo de um caminho como a soma dos tempos de execução dos nós que contém.]

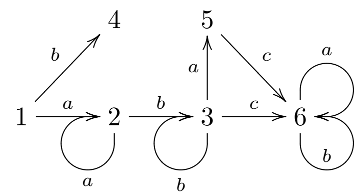
Exercício 6.20 Uma empresa tem que distribuir géneros pelas casas **X**, **Y**, **Z**, **U**, **V** e **W**. Existem as seguintes ruas: de **X** para **Y**, **V** e **U**, de **Y** para **W**, de **Z** para **Y**, **U** e **V**, de **V** para **Y** e **U**, e de **W** para **X**, **Z**, e **V**. Existe ainda uma rua da empresa para qualquer casa e vice-versa. Verifique se existe alguma possibilidade de fazer a entrega sem passar duas vezes pela mesma casa.

Exercício 6.21 Numa região sem electricidade foram estudados os custos de instalação de linhas eléctricas entre as diversas povoações (em dezenas de milhar de contos):

Entre A e B:	2	Entre C e E:	1	Entre D e F:	3
Entre A e C:	2	Entre C e D:	3	Entre E e F:	2
Entre B e E:	2	Entre D e E:	4	Entre F e G:	7

Entre os pares de povoações não indicadas não é possível a instalação. Qual é o custo minímo de instalação de electricidade em todas as povoações e quais as linhas a construir? (NB: a povoação E já tem electricidade; as ligações eléctricas são "transitivas")

Exercício 6.22 No grafo representado na figura, dizemos que uma "palavra" é "aceite" se existe um caminho de 1 para 6 em que os símbolos associados aos ramos constituem a sequência de "letras" da palavra.



(i) Verifique a aceitação das seguintes palavras: *ab*, *aaa*, *abca*, *acab*, *abbacab*.

(ii) Descreva o conjunto de *todas* as palavras aceites pelo grafo.

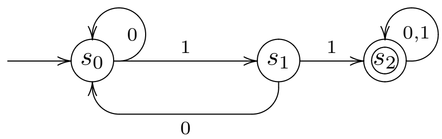
Exercícios de Tópicos de Matemática Discreta

95/96

Folha nº 4

7 Linguagens, Autómatos e Expressões Regulares

Exercício 7.1 Considere o autómato finito representado na figura.



a) Construa uma descrição formal para este autómato como um tuplo $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$;

b) Indique quais das seguintes palavras são aceites por este autómato: 101001, 11001010111, 111111 e 0000011000;

c) Diga (em português) qual a propriedade que uma palavra de $\{0, 1\}^*$ têm de ter para ser aceite por este autómato.

Exercício 7.2 Caracterize um autómato finito que a reconheça a linguagem das palavras de $\{0, 1\}^*$ que...

1. não têm nenhum "1";
2. são diferentes de "1";
3. contêm pelo menos algum "0" e algum "1";
4. têm comprimento não inferior a 2;
5. não contêm "101" como sub-palavra;
6. terminam em "1";
7. terminam em "1" mas não em "111";
8. têm pelo menos dois "0" consecutivos;
9. terminam em "1" e têm pelo menos dois "0" consecutivos;
10. têm um número ímpar de "0" ou um número par de "1";
11. têm no máximo um par de "0" e um par de "1" consecutivos;
12. são representação binária de inteiros positivos múltiplos de 4;
13. são representação binária de inteiros positivos múltiplos de 2 mas não de 3;

14. contêm (algures) pelo menos três “0” seguidos, mas não contêm dois ou mais “1” seguidos’
15. se têm algum par de “0” adjacentes, este aparece antes de qualquer par de “1” adjacentes;
16. não terminam em “1101” nem em “1011”;
17. têm igual número de “0” e “1” e nenhum seu prefixo tem um número de “0” que excede em dois o número de “1”, nem um número de “1” que excede em dois o número de “0”

Exercício 7.3 Caracterize cada uma das linguagens do exercício 7.2 anteriores através de uma expressão regular — *i.e.*, usando os símbolos do alfabeto $\{0,1\}$, ϵ (palavra vazia), e os operadores $+$ (união), $\cdot$ (concatenação), $*$ (fecho de Kleene).

Exercício 7.4 Considerar a linguagem de $\{a,b\}^\star$ definida pela expressão regular seguinte:

$$(a+b)(aa+bb)^\star(b+a)+(b+a)(aa+bb)^\star \qquad (1)$$

a) Descrever informalmente essa linguagem;

b) Construir um autómato finito determinístico que a reconheça.

Exercício 7.5 Descrever informalmente os subconjuntos de $\{0,1\}^\star$ representados pelas seguintes expressõoes regulares:

a) $(11+0)^\star(00+1)^\star$

b) $(1+01+001)^\star(e+0+00)$

c) $[00+11+(01+10)(00+11)^\star(01+10)]^\star$

Exercício 7.6 Seja $L1 = \{0^n1^n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0^n1^{n+1} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ uma linguagem de $\{a,b,0,1\}^\star$ e seja R_{L1} a relação definida em $\{a,b,0,1\}^\star$ por:

$$xR_{L1}y \quad sse \quad \forall\, z \in \{a,b,0,1\}^s tar\; xz \in L1 \Leftrightarrow yz \in L1$$

a) Mostrar que R_{L1} é relação de equivalência;

b) Descrever as classes de equivalência de a, 01, 011 e de 0111;

$\star$ Mostrar que a relação de equivalência R_{L1} não é de índice finito[1];

NB: Sendo Σ um alfabeto e L uma linguagem qualquer de $\Sigma^\star$ pode-se mostrar que L é regular sse é finito o conjunto das classes de equivalência de R_L definida em $\Sigma^\star$ por: xR_Ly sse $\forall z \in \Sigma^\star\; xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$. Assim, podemos concluir que $L1$ não é regular. No exercício 7.8 demonstra-se este teorema.

Exercício 7.7 Seja $M = (\{q0,q1,q2,q3\},\{a,b\},d,q_0,\{q_1,q_2\})$ um autómato finito determin{́ı}stico, tal que:

$$\begin{array}{llll}\delta(q_0,a)=q_1 & \delta(q_1,a)=q_2 & \delta(q_2,a)=q2 & \delta(q_3,a)=q_1\\ \delta(q_0,b)=q_3 & \delta(q_1,b)=q_3 & \delta(q_2,b)=q_0 & \delta(q_3,b)=q_0\end{array}$$

Denote-se o alfabeto de M, $\{a,b\}$, por Σ, e a linguagem reconhecida por M por L. Seja δ' a função (definida em $\Sigma^\star$) naturalmente associada a δ (ver definição no exercício 7.8). Sejam R_M e R_L as relações definidas em $\Sigma^\star$ do modo seguinte:

$$\begin{array}{lll} xR_My & sse & \delta'(q_0,x)=\delta'(q_0,y)\\ xR_Ly & sse & \forall z \in \Sigma^\star\; xz \in L \Leftrightarrow yz \in L\end{array}$$

[1] índice de uma relação de equivalência é o cardinal do seu conjunto de classes de equivalência

a) Mostrar que L é o conjunto das sequências de a's e b's que terminam em a.(Sugestão: use indução no comprimento do caminho – comprimento da palavra – no diagrama de transição do autómato; a hipótese pode ser: a qualquer palavra de comprimento λ formada por a's e b's corresponde algum caminho no diagrama de δ com início em q_0, sendo o seu extremo final algum nó em $\{q1, q2\}$ se e só se a palavra termina em a)

b) Mostrar que R_M e R_L são relações de equivalência;

c) Determinar as classes de equivalência de R_M e as de R_L. Justifique que existe uma bijecção do conjunto das classes de equivalência de R_M no conjunto de estados de M.

d) Que relação existe entre as classes de R_M e a linguagem reconhecida pelo autómato? E entre as classes de R_L e a mesma linguagem? E entre as classes de R_M e as de R_M?

e) Em geral, se M é um autómato finito determinístico que não encrava, a relação R_M é sempre de equivalência (ver exercício 7.8.). No entanto, pode acontecer que não exista uma bijec{c}ão do conjunto das classes de equivalência de R_M no conjunto de estados de M. Indique uma condição necessária e suficiente para que não exista tal bijeção.

f) Deve ter concluído em d) que a linguagem reconhecida pelo autómato é uma das classes de equivalência de R_L. Em geral, dada uma qualquer linguagem L a relação R_L é sempre de equivalência (ver exercício 7.8.). Pode acontecer que L não esteja contida em nenhuma das classes de equivalência de R_L. Dê um exemplo de uma linguagem regular L que não está contida em nenhuma das classes da relaç ao R_L que lhe está associada.

Exercício 7.8 Seja $M = (Q, \Sigma, \delta, s_0, F)$ um autómato finito determinístico

a) Define-se a função δ' (extensão de δ a sequências) de $Q \times \Sigma^\star$ em Q por:

$$\begin{aligned} \delta'(q, \epsilon) &= q \\ \delta'(q, xa) &= \delta(\delta'(q, x), a) \qquad \text{para } x \in \Sigma^\star \text{ e } a \in \Sigma \end{aligned}$$

Mostrar que: $\forall x \in \Sigma^\star \forall \in \Sigma^\star \delta'(q, xy) = \delta'(\delta'(q, x), y)$

Obs: uma vez que δ e δ' tomam os mesmos valores nos pontos em que δ está definida, normalmente não se faz distin{c}ão de nota{c}ão (em cada caso deve ser claro qual das funções se está a usar)

b) Seja R_M a relação definida em $\Sigma^\star$ por:

$$xR_My \quad sse \quad \delta(q_0, x) = \delta(q_0, y), \ \ \forall x \in \Sigma^\star \forall y \in \Sigma^\star$$

Mostrar que:

(i) R_M é relação de equivalência de índice finito (quais são as classes de equivalência das palavras aceites pelo autómato M?)

(ii) R_M é invariante à direita, isto é $\forall z \in \Sigma^\star \ xR_My \Rightarrow xzR_Myz$;

c) Mostrar que é condição necessária para que uma linguagem L de $\Sigma^\star$ seja aceite por algum autómato finito que L seja a reunião de classes de equivalência de uma relação de equivalência invariante à direita e de índice finito.

d) Seja L a linguagem e seja R_L a relação de equivalência em $\Sigma^\star$, (naturalmente associada a L) assim definida:

$$xR_Ly \quad sse \quad \forall z \in \Sigma^\star \; xz \in L \;\Leftrightarrow\; yz \in L$$

Mostrar que se L é reunião de algumas das classes de equivalência de alguma relação de equivalência invariante à direita e de índice finito, então qualquer classe de equivalência de R_L contém alguma das classes de equivalência dessa relação. Concluir, que nesse caso o índice de R_L é finito.

e) Mostrar que é condição suficiente para que uma linguagem L seja aceite por algum autómato finito que o índice de R_L seja finito. (Sugestão: mostrar que se pode tomar o conjunto das classes de equivalência de R_L como conjunto de estados do autómato, e que a função de transição pode ser definida por $\delta([x], a) = [xa]$, $\forall x \in \Sigma^\star, a \in \Sigma$)

Das alíneas c), d) e e) conclui-se que as três afirmações seguintes são equivalentes:

(i) a linguagem L de $\Sigma^\star$ é regular;

(ii) a linguagem L de $\Sigma^\star$ é reunião de classes de equivalência de alguma relação de equivalência invariante à direita e de índice finito;

(iii) dada linguagem L de $\Sigma^\star$, seja R_L a relação de equivalência em $\Sigma^\star$ assim definida:

$$xR_Ly \quad sse \quad \forall z \in \Sigma^\star \; xz \in L \Leftrightarrow yz \in L$$

Então R_L é de índice finito.

f) Mostrar que o autómato finito mínimo (isto é, com menor número de estados) que aceita uma dada linguagem regular L é único a menos de isomorfismo e supondo que não se considera o facto do autómato poder encravar. (Sugestão: mostrar que o número de estados de qualquer autómato que aceite L é não inferior ao número de estados do autómato determinado em e), e que se for igual então é possível definir um isomorfismo de um no outro).

g) Verificar se o autómato finito determinado no exercício 7.4é mínimo (no sentido da alínea f))

Exercício 7.9 [$\star$] [*Construção dos subconjuntos*] Considere um autómato finito não-determinístico $\mathcal{A} = (Q, I, F, \delta, \Sigma)$, onde Σ é o alfabeto, Q é um conjunto não vazio de *estados*, $I \subseteq Q$ é o conjunto dos *estados iniciais*, $F \subseteq Q$ é o conjunto dos *estados finais* e $\delta : Q \times \Sigma \to \mathcal{P}(Q)$ é a *função de transição*, que a cada par (estado,símbolo) associa um novo conjunto de estados.

Mostre que pode construir um novo autómato $\mathcal{A}'$, cujos estados são *subconjuntos de estados* de $\mathcal{A}$, tal que $\mathcal{A}'$ é determinístico e reconhece a mesma linguagem que $\mathcal{A}$.

Exercício 7.10 Considere o autómato finito *não-determinístico*

$$\mathcal{M} = (\{q_0, q_1, q_2\}, \{q_0\}, \{q_2\}, \delta, \{a, b\})$$

onde δ é definida por

$$\begin{array}{lll} \delta(q_0, a) = \{q_1, q_2\} & \delta(q_1, a) = \{q_1, q_0\} & \delta(q_2, a) = \{q_0, q_2\} \\ \delta(q_0, b) = \{q_0\} & \delta(q_1, b) = \emptyset & \delta(q_2, b) = \{q_1\} \end{array}$$

(i) Represente o autómato por um grafo dirigido etiquetado com os símbolos correspondentes às transições.

(ii) Usando a construção dos subconjuntos, caracterize um autómato finito *determinístico* que aceite a mesma linguagem.

Exercício 7.11 Dado um autómato finito $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, i, F)$ podemos associar-lhe um *grafo dirigido* $G = (V, E)$ em que o conjunto V dos vértices é Q (*estados* do autómato) e existe o ramo (p, q) se o autómato tiver alguma transição do estado p ao estado q.

As afirmações seguintes referem-se a propriedades da linguagem do autómato $L(\mathcal{A})$ e a propriedades do grafo G; estabeleça as ligações entre as afirmações com as conectivas lógicas $\Leftrightarrow$ ("se e só se") e $\Rightarrow$ ("implica").

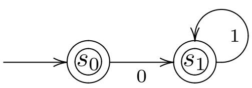
- Afirmações sobre o Autómato e a Linguagem:
  1. $L(\mathcal{A})$ é finita
  2. $L(\mathcal{A})$ é infinita
  3. $L(\mathcal{A})$ é vazia
  4. $L(\mathcal{A})$ é da forma $x \cdot y^*$, com $x, y \in \Sigma^*$
  5. $L(\mathcal{A})$ é da forma S^*, com $S \subseteq \Sigma^*$
  6. $L(\mathcal{A})$ não contêm ϵ
  7. $\mathcal{A}$ tem estados "supérfluos"
- Afirmações sobre o Grafo:
  (i) o vértice i não é estado final
  (ii) G não têm *caminhos dirigidos* começando em i
  (iii) G não tem estados finais acessíveis de i
  (iv) G tem vértices isolados
  (v) G é fortemente conexo
  (vi) G não tem ciclos
  (vii) G tem um único estado final acessível de i

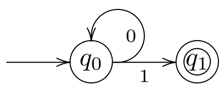
Exercício 7.12 Considere a seguinte linguagem de $\{0,1\}^*$:

$$L = \{x \in \{0,1\}^* : x \text{ têm o mesmo número de "1" e "0"}\}$$

Discuta informalmente se tal linguagem poderá ser reconhecida por algum autómato finito. [*Sugestão:* Um tal autómato tem necessáriamente um conjunto finito de estados e têm de se "comportar" sempre da mesma maneira quando passa num mesmo estado...]

Exercício 7.13 Considere dois autómatos $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$:

$\mathcal{A}$: 

$\mathcal{B}$: 

(i) Descreva a linguagem reconhecida por cada um deles como uma expressão regular.

(ii) Construa um outro autómato $\mathcal{C}$, por composição de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, tal que $L(\mathcal{C}) = L(\mathcal{A}) \cup L(\mathcal{B})$. (Note que $\mathcal{C}$ pode não ser um autómato determinístico...).

(iii) Construa um autómato $\mathcal{D}$, por composição de $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$, tal que $L(\mathcal{D}) = L(\mathcal{A}) \cdot L(\mathcal{B})$. (De novo, $\mathcal{D}$ pode não ser um autómato determinístico).

(iv) Construa um autómato $\mathcal{B}'$, partindo de $\mathcal{B}$, tal que $L(\mathcal{B}') = \{0,1\}^* \setminus L(\mathcal{B})$.

Exercício 7.14 Seja $\mathcal{A} = (Q, i, F, \delta, \Sigma)$ um autómato finito determinístico.

(i) Mostre que é sempre possível construir outro autómato $\mathcal{A}'$ que reconhece a mesma linguagem e que ainda é determinístico tal que a função δ' passe a estar definida para todos os pares (estado,símbolo) (q, σ) com $q \in Q', \sigma \in \Sigma$.

(ii) Usando a construção da alínea anterior, mostre que pode construir um autómato finito $\mathcal{B}$ que reconhece a linguagem complementar de $\mathcal{A}$ — *i.e.*, $L(\mathcal{B}) = \Sigma^* \setminus L(\mathcal{A})$.

(iii) Mostre que se $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ forem dois autómatos finitos com o mesmo alfabeto, se pode construir um autómato $\mathcal{B}$ que reconhece $L(\mathcal{A}_1) \cup L(\mathcal{A}_2)$. [*Nota:* nesta alínea os autómatos em questão *não têm que ser determinísticos!*]

(iv) Argumente porque razão as duas alíneas anteriores mostram que *a classe das linguagens reconhecidas por autómatos é fechada para operadores boleanos* — *i.e.*, $\cup, \cap, \setminus$ (complementação) — desde que operados um número finito de vezes.

Será igualmente verdade para um número infinito de operações? (se não, dê um contra-exemplo).

Exercício 7.15 * [*Lema da Repetição*] Seja $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, \delta, i, F)$ um autómato finito com n estados (*i.e.*, $card(Q) = n$) e um único estado inicial i. Mostre que, para qualquer palavra $u \in \Sigma^*$ aceite pelo autómato, de comprimento maior ou igual a n ($|u| \geq n$), existem

$$x, v, y \in \Sigma^*, \text{ tais que } |x| < n \wedge |v| < n \wedge v \neq \epsilon \wedge u = x \cdot v \cdot y$$

e se tem

$$x \cdot v^* \cdot y \in L(\mathcal{A})$$

i.e., xv^iy é aceite pelo autómato, para todo $i \geq 0$.

[*Sugestão:* Se u é aceite pelo autómato e tem comprimento maior que o número de estados, então *no caminho bem-sucedido associado à palavra u algum estado vai se repetir*. Pode definir x, v, y como é sugerido no seguinte esquema…]

$$\begin{tikzcd} i \arrow[r, "x"] & j \arrow[loop above, "v"] \arrow[r, "y"] & f \in F \end{tikzcd}$$

Exercício 7.16 Para cada uma das seguintes linguagens, decida se ela pode ser reconhecida por um autómato finito, usando se necessário o *lema da repetição*. Em caso afirmativo, pretende-se mostrar que a linguagem é regular *sem necessitar de exibir um autómato!*

(i) $L = \{x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}^* : x$ representa (em decimal) um primo inferior a $1000\}$

(ii) $L = \{x \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}^* : x$ representa (em decimal) um inteiro maior que $1000\}$

(iii) $L = \{a^i b^j c^k \in \{a, b, c\}^* : i \geq 0, j \geq 0, k \geq 0\}$

(iv) $L = \{a^i b^j c^i \in \{a, b, c\}^* : i \geq 0, j \geq 0\}$

(v) $L = \{a^i b^j \in \{a, b\}^* : i \geq 0, j \geq i\}$

(vi) $L = \{x \in \{(,), +, 0, 1, 2, \ldots, 9\}^* : x$ é uma expressão aritmética "válida"$\}$

(vii) $L = \{x \in \{+, 0, 1, 2, \ldots, 9\}^* : x$ é uma expressão aritmética cujo resultado é $42\}$

Exercício 7.17 Para cada uma das seguintes afirmações, diga se é verdadeira ou falsa, justificando:

(i) uma linguagem é vazia se só contem a palavra vazia;

(ii) se L é uma linguagem finita, o seu complementar $\Sigma^* \setminus L$ é infinito;

(iii) uma linguagem infinita contem alguma palavra infinita;

(iv) se um autómato tem mais estados que outro, então reconhece mais palavras que esse outro;

(v) os autómato finitos reconhecem linguagens finitas e infinitas;

(vi) qualquer linguagem finita pode ser reconhecida por autómato finito;

(vii) qualquer linguagem infinita pode ser reconhecida por um autómato finito;

(viii) um automato não-determinístico pode reconhecer uma linguagem finita;

(ix) se dois automatos finitos têm conjuntos de estados diferentes, reconhecem linguagens diferentes;

(x) num automato finito, se todos estados são finais, então a linguagem reconhecida é Σ^*;

(xi) seja E uma expressão regular; se $\mathcal{L}(E) = \emptyset$, então $\mathcal{L}(E^*) = \emptyset$;

(xii) qualquer que seja E, $\mathcal{L}(E^*) \neq \emptyset$

(xiii) se $\mathcal{L}(E) \neq \emptyset$, então podemos encontrar outra expressão regular F para a mesma linguagem (*i.e.*, $\mathcal{L}(F) = \mathcal{L}(E)$), tal que F não usa o símbolo "$\emptyset$";

Exercício 7.18 O comando do UNIX "`egrep` *`exp.reg.  ficheiro`*", permite procurar ocorrências duma sequência de caracteres em cada linha de um ficheiro. Essa sequência pode ser especificada usando expressões regulares, *exp.reg.*.

É usada a seguinte notação (r e s são expressões regulares quaisquer): o fecho de Kleene é `*`, a união é `|`, a concatenação é a adjacência (rs), e os parêntesis podem ser usados para modificar a precedência, `.` corresponde a qualquer símbolo, r`+` uma ou mais ocorrências de r e r`?` a zero ou uma ocorrência de r (isto evita a representação da palavra vazia).

Existem ainda dois (entre outros) caracteres especiais, que habitualmente não têm significado em expressões regulares, e que indicam o inicio duma linha, `^` , e o seu fim, `$`. (para mais informação executar `man egrep`).

Por exemplo o comando "`egrep '^ (A|O).*(a|o)$' teste`" procura no ficheiro `teste` uma linha que comece com um `A` ou `O` e termine com `a` ou `o`.

Escreva um comando UNIX usando o `egrep` para procurar no ficheiro `exemplo`, linhas que:

(i) contenham a ocorrência de uma qualquer vogal (maiúscula ou minúscula)

(ii) contenham a letra `a` e a letra `o`

(iii) uma palavra (sequência de letras, separada por espaços ou mudança de linha) de 5 letras começada por `s`, tendo um `u` na terceira posição e termine em `e`

(iv) comecem ou terminem por mais que um caracter espaço consecutivo

(v) contenha a palavra `porto` em maíusculas ou minúsculas

Exercício 7.19 * Dado um autómato finito determinístico $\mathcal{A} = (Q, i, F, \delta, \Sigma)$, pretende-se escreve um programa em linguagem C que permita "simular" o comportamento do autómato com uma palavra de alfabeto, verificando se o automato aceita ou não a palavra dada.

Suponha que o alfabeto Σ é o código ASCII usual, e os estados são numerados de 1 até n (n, número de estados é dado).

Como o autómato é determinístico, a função de transição de estados

$$\delta : Q \times \Sigma \longrightarrow Q$$

pode ser representada por uma variável indexada em linguagem C

```
int delta[n][256];
```

com `delta[q][c]` $= \delta(q, c)$ ou 0 se a função não está definida nesse par.

Terá ainda que representar o (sub)conjunto de estados finais e qual o estado inicial.

A palavra a verificar pode ser (por exemplo) lida letra-a-letra da entrada "standard" usando `getchar()`.

Note-se que o algoritmo deve ser genérico, *i.e.*, funcionar para *qualquer* descrição de um autómato com as especificações anteriores.

Exercícios de Tópicos de Matemática Discreta

95/96

Folha nº 5

8 Gramáticas e Linguagens Independentes de Contexto

Exercício 8.1 Seja G a gramática independente de contexto, descrita por $G = (V, \Sigma, P, S)$, onde o alfabeto é $\Sigma = \{0, 1\}$, os símbolos não terminais são $V = \{S\}$, o símbolo inicial é S e as produções são dadas por $P = \{S \to \epsilon,\ S \to 0S,\ S \to 1S\}$.

(a) Obtenha uma derivação para as seguintes sequências:

i. 001 ii. 101000 iii. 111000

(b) Mostre que a linguagem gerada por G é o conjunto de todas as sequências finitas de 0s e 1s, *i.e.*, $\{0, 1\}^\star$.

(c) Considerando a *derivação num passo* associada a G como uma relação binária em $(\Sigma \cup V)^\star$, determine as suas propriedades. E, as da relação $\Rightarrow^\star$ (*derivação em vários passos*)?

Exercício 8.2 Para cada uma das linguagens regulares do exercício 7.2 da Folha nº 4, indique uma gramática independente de contexto que a gere.

Exercício 8.3 Justifique a afirmação: "a linguagem $\{0^n 1^{2n} : n \geq 0\}$ do alfabeto $\{0, 1\}$ não é regular mas é independente de contexto."

Exercício 8.4 Para cada uma das seguintes linguagens, diga se é regular e/ou independente de contexto, e apresente uma gramática independente de contexto que a gere.

(a) $L_1 = \{x \in \{0,1\}^\star |\ x$ não tem um número ímpar de 0's consecutivos imediatamente depois de um número ímpar de 1's consecutivos$\}$

(b) $L_2 = \{x \in \{0,1\}^\star |\ x$ não tem mais que dois 0s consecutivos$\}$

(c) $L_3 = \{x_1 \dots x_n \in \{0,1\}^\star \mid n \in \mathbb{N},\ x_i \in \{0,1\}\{0,1\}$, o número de x_i's em $\{01, 10\}$ é ímpar$\}$

(d) $L_4 = \{x@\bar{x} \in \{a, b, @\}^\star |\ x \in \{a, b\}^\star$ e $\bar{x}$ é a palavra x invertida $\}$

(e) $L_5 = \{x : y \in \{0, 1, :\}^\star |\ x, y \in \{0,1\}^\star \backslash \{\epsilon\}$ e $x \equiv y \pmod 3\}$

(f) $L_6 = \{x \in \{0,1\}^\star |$ 3 divide a diferença entre o número de 0's e 1's em $x\}$

(g) $L_7 = \{a^i b^j c^i \in \{a, b, c\}^\star |\ i \geq 0,\ j \geq 0\}$

(h) $L_8 = \{a^i b^{i+j} c^j \in \{a, b, c\}^\star |\ i \geq 0,\ j \geq 0\}$

(i) $L_9 = \{0^n 1^m \in \{0,1\}^\star |\ n \geq 0, m \geq n\}$

(j) $L_{10} = \{x \in \{0,1\}^\star |$ o número de 0's em x é diferente do número de 1's $\}$.

Exercício 8.5 Seja $G = (\{S\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \{S \to \mathtt{aa}S,\ S \to \mathtt{cc}S,\ S \to \mathtt{b}S\mathtt{aa},\ S \to \mathtt{b}\}, S)$ uma gramática independente de contexto. Denote-se por V e Σ os conjuntos de variáveis e terminais de G, respectivamente.

a) Determine $\mathcal{D}_n = \{w \in (V \cup \Sigma)^\star \mid S \Rightarrow_G^n w\}$ para $n = 1, 2, 3, 4$.

b) Determine as árvores de derivação para aaccbaa e aabccbaabaaaa.

c) Mostre que abaac $\notin \mathcal{L}(G)$.

d) Descreva informalmente a linguagem gerada pela gramática.

e) Mostre por indução sobre o número de passos da derivação que quaisquer que sejam $n \in \mathbb{N}$ e $x \in (V \cup \Sigma)^\star$,

$$\text{se } S \Rightarrow_G^n x \quad \text{então} \quad \exists k \in \mathbb{N}_0\ \exists w \in (\{\mathtt{b}\}\mathcal{A})^k\ \ \exists y \in \mathcal{A} \quad x = yw\mathtt{ba}^{2k} \ \vee\ x = ywS\mathtt{a}^{2k}$$

em que $\mathcal{A} = \{\mathtt{aa}, \mathtt{cc}\}^\star$. Conclua que $\mathcal{L}(G) \subseteq \{yw\mathtt{ba}^{2k} \mid y \in \mathcal{A},\ w \in (\{\mathtt{b}\}\mathcal{A})^k,\ k \in \mathbb{N}_0\} = \{x\mathtt{a}^{2(k-1)} \mid x \in (\mathcal{A}\{\mathtt{b}\})^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

f) Mostre que $\mathcal{L}(G) \supseteq \{x\mathtt{a}^{2(k-1)} \mid x \in (\mathcal{A}\{\mathtt{b}\})^k,\ k \in \mathbb{N}\}$ em que $\mathcal{A} = \{\mathtt{aa}, \mathtt{cc}\}^\star$,

(i) mostrando que $S \Rightarrow_G^{|w|/2} wS$, qualquer que seja $w \in \mathcal{A}$; (Por indução sobre $|w|$)

(ii) concluindo que $S \Rightarrow_G^{1+|w|/2} wb$, qualquer que seja $w \in \mathcal{A}$;

(iii) e concluindo que $S \Rightarrow_G^{1+|w|/2} wbSaa$, qualquer que seja $w \in \mathcal{A}$;

(iv) para mostrar que para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\textbf{se} \ \ \forall w \in (\mathcal{A}\{\mathtt{b}\})^k\{\mathtt{a}\}^{2(k-1)} \ \ S \Rightarrow_G^\star w \ \ \textbf{então} \ \ \forall w \in (\mathcal{A}\{\mathtt{b}\})^{k+1}\{\mathtt{a}\}^{2k} \ \ S \Rightarrow_G^\star w;$$

(v) e concluir $\mathcal{L}(G) \supseteq \{x\mathtt{a}^{2(k-1)} \mid x \in (\mathcal{A}\{\mathtt{b}\})^k,\ k \in \mathbb{N}\}$.

g) O que conclui das alíneas anteriores?

h) A gramática que G é ambígua?

i) Descreva um autómato de pilha que reconheça $\mathcal{L}(G)$.

Exercício 8.6 Escreva uma gramática independente de contexto que gere o conjunto das expressões regulares sobre o alfabeto $\{0, 1\}$.

Exercício 8.7 Seja $G = (\{S\}, \{p, [,], \neg, \Rightarrow\}, P, S)$ uma gramática independente de contexto, cujo conjunto de produções é $P = \{S \to p, S \to \neg S, S \to [S{\Rightarrow}S]\}$.

a) Dê exemplos (e justifique) de palavras em $\{p, [,], \neg, \Rightarrow\}^\star$ que pertencem a $L(G)$, e de palavras que não pertencem.

b) Descreva informalmente a linguagem gerada pela gramática. Mostre que essa linguagem não é regular.

Exercício 8.8 a) Descreva uma gramática independente de contexto que gere os racionais representáveis como dízimas finitas. Os dígitos da representação são decimais, e deve incluir a notação com ponto decimal (por exemplo, 13.1, -15.21) e a notação científica (por exemplo, $-.131E2$, $131E-2$). Justifique que essa linguagem é regular.

b) Descreva uma gramática independente de contexto que gere a linguagem das expressões aritméticas bem formadas. Utilize a gramática que definiu em a) e suponha que $+$, $-$, $*$, e $/$ são os operadores.

c) Mostre que $-13.1 * (25E - 3 + 278.5 + (45 - 1.025)/(23 * 2E9))$ pertence à linguagem gerada pela gramática que descreveu em b).

Exercício 8.9 Seja M um autómato de pilha cujo conjunto de estados é $\{q_0, q_1, q_2\}$, sendo q_0 o estado inicial e $\{q_1\}$ o conjunto de estados finais. O alfabeto da pilha é $\{\mathtt{Z}, \mathtt{B}\}$, sendo Z o símbolo inicial na pilha. O alfabeto de entrada é $\{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ e as transições são:

$$\begin{array}{rcl} \delta(q_0, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) & = & \{(q_1, \mathtt{Z})\} \\ \delta(q_0, \mathtt{b}, \mathtt{Z}) & = & \{(q_0, \mathtt{BZ})\} \\ \delta(q_0, \mathtt{a}, \mathtt{B}) & = & \{(q_1, \mathtt{B})\} \\ \delta(q_1, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \\ \delta(q_2, \epsilon, \mathtt{Z}) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} \delta(q_1, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) & = & \{(q_1, \mathtt{Z}), (q_1, \epsilon)\} \\ \delta(q_0, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(q_0, \mathtt{BB})\} \\ \delta(q_1, \mathtt{a}, \mathtt{B}) & = & \{(q_1, \mathtt{B})\} \\ \delta(q_2, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(q_2, \epsilon)\} \end{array}$$

Diz-se que o conjunto das sequências que levam o autómato da configuração inicial a pilha vazia (por *pop* de Z) é a linguagem reconhecida pelo autómato por pilha vazia, denotando-se por $N(M)$. O conjunto das sequências que levam o autómato da configuração inicial a um estado final é a linguagem reconhecida pelo autómato por estados finais denotando-se por $T(M)$. Qualquer dessas linguagens é independente de contexto.

a) Mostre que qualquer palavra da linguagem descrita por $\mathtt{aa}^\star$ é aceite pelo autómato por estados finais e por pilha vazia.

b) Mostre que qualquer palavra da linguagem descrita por $\mathtt{bbaa}^\star$ é aceite pelo autómato por estados finais mas não por pilha vazia.

c) Mostre que nenhuma palavra da linguagem descrita por $\mathtt{bbb}^\star\mathtt{aa}^\star\mathtt{b}$ é reconhecida pelo autómato por estados finais ou por pilha vazia.

d) Descreva informalmente $N(M)$ e $T(M)$. Comente a afirmação:

$T(M)$ pode ser aceite por um autómato finito determinístico mas $N(M)$ não.

e) Indique uma gramática independente de contexto que gere $N(M)$.

Exercício 8.10 Seja $L(G)$ a linguagem gerada pela gramática independente de contexto

$$G = (\{E, N, Z\}, \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, +, -, \times, /, (,)\}, P, E),$$

onde as produções P são dadas por

$$\begin{array}{ll} E \to & E + E \mid E - E \mid E \times E \mid E/E \mid (E) \mid N \\ N \to & 1Z \mid 2Z \mid 3Z \mid 4Z \mid 5Z \mid 6Z \mid 7Z \mid 8Z \mid 9Z \mid \\ & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \\ Z \to & 0Z \mid 1Z \mid 2Z \mid 3Z \mid 4Z \mid 5Z \mid 6Z \mid 7Z \mid 8Z \mid 9Z \mid \\ & 0 \mid 1 \mid 2 \mid 3 \mid 4 \mid 5 \mid 6 \mid 7 \mid 8 \mid 9 \end{array}$$

(a) Dê exemplos de palavras que pertencem a $L(G)$ e de palavras que não pertencem a L(G), justificando. Descreva informalmente a linguagem $L(G)$.

(b) Construa derivações pela esquerda, derivações pela direita e árvores sintácticas para as palavras seguintes:

i. $3 \times (5 + 23)$ ii. $10 - 5 + 34$ iii. $2 \times 34 \times (6 - 8)$

(c) Mostre que *a gramática G é ambígua*, *i.e.*, existem palavras da linguagem que têm mais que uma árvore de derivação. Contudo, existem palavras para as quais isso não acontece. Pode dar exemplos de palavras em que todas as derivações conduzem à mesma árvore?

(d) Mostre que apesar da gramática ser ambígua, a linguagem não é ambígua (ou seja, que há outras gramáticas não ambíguas que geram $L(G)$), descrevendo uma gramática não ambígua para a mesma linguagem.

Exercício 8.11 Descreva autómatos de pilha que reconheçam (por pilha vazia ou por estados finais) cada uma das linguagens seguintes:

$$\begin{array}{rcl}
L_4 & = & \{x@\bar{x} \in \{a, b, @\}^\star \mid \bar{x} \text{ é a inversa de } x, \text{ e } x \in \{a, b\}^\star\} \\
L_4' & = & \{x \in \{a, b\}^\star \mid x \text{ é capícua}\} \\
L_5 & = & \{x : y \in \{0, 1, :\}^\star \mid x, y \in \{0, 1\}^\star \setminus \{\epsilon\}, \text{ e } x \equiv y \pmod 3\} \\
L_8 & = & \{a^i b^{i+j} c^j \in \{a, b, c\}^\star \mid i \geq 0, \, j \geq 0\} \\
L_9 & = & \{0^n 1^m \in \{0, 1\}^\star \mid n \geq 0, m \geq n\} \\
L & = & \mathcal{L}(G), \text{ onde } G \text{ é a gramática descrita no exercício 8.7}
\end{array}$$

Exercício 8.12 Seja L a linguagem aceite por estados finais pelo autómato de pilha $M = (\{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}, \{\mathtt{Z}, \mathtt{B}\}, \delta, s_0, \mathtt{Z}, \{s_5\})$ em que δ é assim definida

$$\begin{array}{rclcrcl}
\delta(s_0, \mathtt{a}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{Z})\} & \quad & \delta(s_2, \mathtt{c}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \mathtt{B})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{Z}) & = & \{(s_0, \mathtt{BZ})\} & & \delta(s_2, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_3, \mathtt{B})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_0, \mathtt{BB})\} & & \delta(s_3, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_4, \mathtt{B})\} \\
\delta(s_0, \mathtt{c}, \mathtt{B}) & = & \{(s_1, \mathtt{B})\} & & \delta(s_4, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_5, \epsilon)\} \\
\delta(s_1, \mathtt{c}, \mathtt{B}) & = & \{(s_2, \mathtt{B})\} & & \delta(s_5, \mathtt{b}, \mathtt{B}) & = & \{(s_3, \mathtt{B})\}
\end{array}$$

a) Determine as mudanças de configuração do autómato ao processar cada uma das palavras seguintes: `bcbbb`, `bbbb`, `aaaabbccccbbbbbbb`, e `aaaabbccccbbbbbb`. Quais são aceites pelo autómato (por estados finais)?

b) Seja $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, s_4, s_5\}$, $\Sigma = \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}$ e $\Gamma = \{\mathtt{Z}, \mathtt{B}\}$. Mostre que, para o autómato M se tem:

(i) M é determinístico, *i.e.* quaisquer que sejam $s, s' \in S$, $x, x' \in \Sigma^\star$, $X, X' \in \Gamma^\star$, e $n \in \mathbb{N}$, **se** $x \neq \epsilon$ **e** $(s, xx', X) \vdash^n (s', x', X')$ **então** (s', X') é único e $n = |x|$.

(ii) $\forall x, w \in \Sigma^\star \; \forall n \in \mathbb{N} \quad (s_0, wx, \mathtt{Z}) \vdash^n (s_0, x, \mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{a}^n$

(iii) $\forall w, x \in \Sigma^\star \; \forall n \in \mathbb{N}_0 \; \forall m \in \mathbb{N} \quad (s_0, wx, \mathtt{Z}) \vdash^{n+m} (s_0, x, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^m$

(iv) $\forall w, x \in \Sigma^\star \; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad (s_0, wx, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \vdash^{2p+1} (s_1, x, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{c}^{2p+1}$

(v) $\forall w, x \in \Sigma^\star \; \forall m \in \mathbb{N} \;\; \forall p \in \mathbb{N}_0 \quad (s_0, wx, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \vdash^{2p+2} (s_2, x, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{c}^{2p+2}$

(vi) $\forall w, x \in \Sigma^\star \; \forall m \in \mathbb{N} \quad (s_2, wx, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \vdash^3 (s_5, x, \mathtt{B}^{m-1}\mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{bbb}$

(vii) $\forall w, x \in \Sigma^\star \; \forall m \in \mathbb{N} \quad (s_2, wx, \mathtt{B}^m\mathtt{Z}) \vdash^{3m} (s_5, x, \mathtt{Z}) \quad sse \quad w = \mathtt{b}^{3m}$

c) Baseando-se na alínea anterior, descreva a linguagem L.

d) Descreva uma gramática independente de contexto que gere L.

e) Descreva um autómato de pilha que aceite L por pilha vazia.

f) Descreva um autómato de pilha que aceite $\{\mathtt{a}^n\mathtt{b}^m\mathtt{c}^p\mathtt{b}^m \mid n, p \in \mathbb{N}_0,\ \ m \in \mathbb{N}\}$ por estados finais. Verifique que o autómato que descreveu é não-determinístico. Tente explicar por que é que não existe um autómato de pilha determinístico que aceite essa linguagem. (**A classe de linguagens aceites por autómatos de pilha determinísticos está propriamente contida na classe de linguagens aceites por autómatos de pilha não determinísticos**.)

Exercício 8.13 Mostre que qualquer linguagem que é reconhecida por um autómato de pilha por estados finais pode ser reconhecida por algum autómato de pilha por pilha vazia e vice-versa.

Exercício 8.14 Seja $L(G)$ a linguagem independente de contexto gerada pela gramática seguinte:

$G = (\{< exp >\}, \{[,]\}, \{< exp > \to < exp >< exp >, < exp > \to [< exp >], < exp > \to \epsilon)\}, < exp >)$

a) Dê exemplos de frases de $\{[,]\}^\star$ que pertencem a $L(G)$, e de frases que não pertencem a esse conjunto (Justifique). Descreva informalmente as frases de $L(G)$.

b) Justifique que qualquer frase de $L(G)$ admite mais do que uma árvore de derivação.

c) Indique uma sequência de $L(G)$ que admita duas derivações às quais corresponde uma mesma árvore de derivação.

d) Justifique que: *G é uma gramática ambígua, mas a linguagem gerada por G não é ambígua.*

e) Descreva um autómato de pilha (stack) que reconheça a linguagem por pilha vazia.

f) ($\star$) Mostre que a linguagem aceite pelo autómato que descreveu na alínea anterior é $L(G)$.

Exercício 8.15 ($\star$) Seja $L(G)$ a linguagem independente de contexto gerada pela gramática seguinte:

$$G = (\{A, B\}, \{a, b\}, \{A \to a, A \to aBB, B \to b, B \to bAA\}, A)$$

a) Dê exemplos de frases de $\{a, b\}^\star$ que pertencem a $L(G)$, e de frases que não pertencem (Justifique). Descreva informalmente as frases de $L(G)$.

b) Indique uma sequência de $L(G)$ que admita duas derivações às quais corresponde uma mesma árvore de derivação.

c) A gramática G é ambígua?

d) Descreva um autómato de pilha que aceite $L(G)$ por pilha vazia.

Exercício 8.16 Sejam L_1 e L_2 linguagens de alfabeto Σ geradas pelas gramáticas independentes de contexto $G_1 = (V_1, \Sigma, P_1, S_1)$ e $G_2 = (V_2, \Sigma, P_2, S_2)$, respectivamente.

a) Suponha ainda que $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Mostre que $G = (V_1 \cup V_2 \cup \{S\}, \Sigma, P_1 \cup P_2 \cup \{S \to S_1, S \to S_2\}, S)$, em que $S \notin V_1 \cup V_2$, gera $L_1 \cup L_2$.

b) Suponha que G_1 e G_2 são não ambíguas. Indique uma condição suficiente para que G (definida em a)) seja ambígua. A condição que indicou é necessária?

c) Mostre que a união finita de linguagens independentes de contexto é independente de contexto. E, a união infinita?

d) Mostre a veracidade ou falsidade de cada uma das afirmações seguintes:

(i) L_1L_2 é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

(ii) existem linguagens L_1 e L_2 tais que $L_1 \cap L_2$ não é independente de contexto.

(iii) $L_1 \cap L_2$ não é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

(iv) $\overline{L_1}$ é independente de contexto, qualquer que seja L_1.

(v) $L_1^\star \cup L_2$ é independente de contexto, quaisquer que sejam L_1 e L_2.

Exercício 8.17 Mostre que a classe das linguagens regulares está contida na classe das linguagens independentes de contexto, por construção da gramática independente de contexto naturalmente associada à linguagem aceite por um dado autómato finito determinístico.

Mais precisamente, dado

$$\mathcal{A} = (\{q_1, q_2, \ldots, q_n\}, \Sigma, \{q_1\}, \delta, F)$$

um autómato finito determinístico, considere a gramatica independente de contexto $G = (V, \Sigma, P, V_1)$ onde

- $V = \{V_1, V_2, \ldots, V_n\}$, n símbolos não-terminais;
- $V_i \to aV_j \ \in P$ sse no autómato existe uma transição $(q_i, a, q_j) \in \delta$, com $a \in \Sigma$;
- $V_i \to \epsilon \ \in P$ sse o estado q_i é final, *i.e.*, $q_i \in F$;

para todos $1 \leq i \leq n$, $1 \leq j \leq n$.

(a) Mostre, usando a definições de linguagem gerada pela gramática e linguagem aceite por um autómato, que a gramática G assim construída gera a linguagem aceite pelo autómato $\mathcal{A}$.

(b) Seja $G_1 = (\{\mathtt{S}, \mathtt{V}\}, \{\mathtt{a}, \mathtt{b}\}, P, \mathtt{S})$ uma gramática linear à direita, em que

$$P = \{\mathtt{S} \to \mathtt{a},\ \mathtt{S} \to \mathtt{aV},\ \mathtt{S} \to \mathtt{b},\ \mathtt{V} \to \mathtt{aV},\ \mathtt{V} \to \mathtt{b}\}.$$

Determine um autómato finito que reconheça a linguagem gerada pela gramática G_1, com base num processo inverso ao descrito acima.

(c) Mostre também que qualquer gramatica cujas produções são da forma de G (dita *linear à direita*) gera uma linguagem regular, mostrando que é possível associar um autómato finito que aceita $\mathcal{L}(G)$. Pode garantir que o autómato naturalmente associado seja determinístico?

(d) Argumente que a inclusão da classe das linguagens regulares nas independentes de contexto é estricta, recorrendo por exemplo, a resultados de exercícios anteriores.

Exercício 8.18 Mostre a validade ou falsidade de cada uma das seguintes afirmações:

1. A linguagem $\{x \in \{0,1\}^\star \mid x \text{ tem mais 0's que 1's}\}$ é independente de contexto.
2. O complementar de uma linguagem regular é uma linguagem independente de contexto.
3. A linguagem $\{(ab)^n(cd)^nc^n \mid n \geq 0\}$ de alfabeto $\{a, b, c, d\}$ não é independente de contexto.

4. Se L é uma linguagem independente de contexto que não é regular, o seu complementar $\Sigma^\star \setminus L$ nunca é independente de contexto.
5. Se L e o seu complementar $\Sigma^\star \setminus L$ são linguagens independentes de contexto, então ambas são linguagens regulares.
6. Qualquer linguagem independente de contexto que não seja aceite por autómatos de pilha determinísticos é ambígua.
7. Qualquer linguagem que seja reconhecida por autómato de pilha determinístico é não ambígua.
8. Qualquer linguagem regular pode ser reconhecida por um autómato de pilha com apenas dois estados.
9. A intersecção de uma linguagem independente de contexto com uma linguagem regular é independente de contexto.

Exercício 8.19 Mostre que $L = \{\mathtt{0}^p \mid\ p \text{ é primo}\}$ não é independente de contexto.

Exercício 8.20 A classe de linguagens independentes de contexto não é fechada para a complementação

a) Mostre que $L = \{ww \mid w \in \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}^\star\}$ de alfabeto $\Sigma = \{\mathtt{a},\mathtt{b}\}$ não é independente de contexto, usando o lema da repetição (para linguagens independentes de contexto). Sugestão: dado $n \in \mathbb{N}$ e qualquer, escolha $z = \mathtt{a}^n\mathtt{b}^n\mathtt{a}^n\mathtt{b}^n$ e mostre que se $z = uvwxy$ com $|vwx| \leq n$ e $|vx| \neq 0$, então $vwx = \mathtt{a}^p\mathtt{b}^q$ ou $vwx = \mathtt{b}^p\mathtt{a}^q$ para $p, q \in \mathbb{N}_0$ e tais que $p + q \geq 1$. Como pode escolher i de modo que $uv^iwx^iy \notin L$?

b) ($\star$) Mostre que $\overline{L}$ (*i.e.*, $\Sigma^\star \setminus L$) é independente de contexto, mostrando que é aceite por algum autómato de pilha ou é gerada por alguma gramática independente de contexto. Sugestão: Note que qualquer palavra em $\overline{L}$ ou tem comprimento ímpar ou é da forma $x\mathtt{b}yx\mathtt{a}w$ ou $x\mathtt{a}yx\mathtt{b}$ em que $x, y, w \in \Sigma^\star$, $|y| = |w|$.

Exercício 8.21 a) Seja $L = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N},\ \text{e}\ x_i \in \mathcal{L}x,\ 1 \leq i \leq n\}$ a linguagem dos tuplos de elementos de $\mathcal{L}x = \{y_1/\ldots/y_n \mid n \in \mathbb{N},\ \text{e}\ y_i \in \mathcal{A},\ 1 \leq i \leq n\}$ sendo $\mathcal{A}$ o conjunto das letras do abecedário (26 letras). Mostre que L e $\mathcal{L}x$ são regulares indicando gramáticas lineares (ou à esquerda ou à direita) que as gerem. Indique ainda uma expressão regular que descreva, e um autómato finito determinístico que aceite, cada uma delas.

b)) Seja $L_t = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid n \in \mathbb{N},\ \text{e}\ x_i \in \mathcal{L}x,\ x_i \neq x_k \text{ se } i \neq k,\ 1 \leq i \leq n,\ 1 \leq k \leq n\}$ a linguagem dos tuplos sem repetição de elementos em $\mathcal{L}x$. Reconheça que:

L_t não é uma linguagem independente de contexto.

(Sugestão: note que os conjuntos das variáveis e das produções de uma gramática independente de contexto são finitos.)

c) Mostre, pelo o lema da repetição (para linguagens independentes de contexto), que L_t não é uma linguagem independente de contexto.

d) (...) Descreva uma máquina de Turing que reconheça a linguagem L_t definida acima. (Sugestão: descreva primeiro uma máquina de Turing que verifique se duas sequências Y e Z separadas por uma vírgula são iguais ou diferentes; conclua que uma máquina que reconhece

L_t pode ser obtida a partir dessa. Por exemplo, se a palavra de L_t a reconhecer for (Y, Z, T) então a máquina pode começar por verificar se Y e Z são diferentes. Se forem iguais a sequência não é aceite. Senão verifica em seguida se T é diferente de Y e de Z. Note que "("e ")"marcam o ínicio e o fim da palavra, respectivamente.)

Exercício 8.22 ($\star$)**A classe de linguagens aceites por autómatos de pilha é a classe de linguagens independentes de contexto.**

Diz-se que uma gramática independente de contexto, seja $G = (V, \Sigma, P, S)$, está na *forma normal de Greibach (FNG)* se e só se todas as produções em P são da forma $A \to a\beta$, em que A é uma variável em V, e β é sequência (possivelmente, ϵ) de variáveis em V, $a \in \Sigma$, *i.e.*,

$$G \text{ está na FNG} \quad sse \quad \forall X \in V \;\; \forall w \in (V \cup \Sigma)^\star \;\; \forall (X \to w) \in P \;\; \exists \beta \in V^\star \;\; \exists a \in \Sigma \quad w = a\beta$$

Pode mostrar-se que *qualquer linguagem L independente de contexto tal que $\epsilon \notin L$ pode ser gerada por uma gramática na forma normal de Greibach* (cf, por exemplo [Hopcroft,Ullman]). A prova baseia-se na possibilidade de redução (ou transformação) à forma normal de Greibach duma qualquer gramática independente de contexto que gere L.

a) Mostre que qualquer linguagem L independente de contexto tal que $\epsilon \notin L$, é aceite por algum um autómato de pilha por pilha vazia, mostrando que se $G = (V, \Sigma, P, S)$ for uma gramática na forma normal de Greibach que gere L, então o autómato de pilha

$$M = (\{s_0\}, \Sigma, V, \delta, s_0, S, \emptyset)$$

em que $\delta(s_0, a, A) = \{(s_0, \beta) \mid A \to a\beta \;\; \in P\}$ é tal que

$$\forall x \in \Sigma^\star \; \forall \gamma \in V^\star \quad S \Rightarrow^\star x\gamma \text{ (pela esquerda)} \quad sse \quad (s_0, x, S) \vdash_M^\star (s_0, \epsilon, \gamma)$$

e aceita L por pilha vazia.

b) Como pode mostrar que se $\epsilon \in L$ então ainda é possível construir um autómato de pilha que aceite L por pilha vazia?

c) Mostre que se L é aceite por algum autómato de pilha M por pilha vazia, então L é independente de contexto, mostrando que se $M = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ então $G = (V, \Sigma, P, S)$ em que

- $V = \{[q, A, p] \mid q, p \in Q, \; A \in \Gamma\} \cup \{S\}$;
- P é o conjunto das produções
  - $S \to [q_0, Z_0, q]$, para cada $q \in Q$;
  - $[q, A, q_{m+1}] \to a[q_1, B_1, q_2][q_2, B_2, q_3] \ldots [q_m, B_m, q_{m+1}]$ para cada $q, q_2, \ldots, q_{m+1} \in Q$, sse $(q_1, B_1 B_2 \cdots B_m) \in \delta(q, a, A)$, sendo $a \in \Sigma \cup \{\epsilon\}$ e $A \in \Gamma$ (se $m = 0$ então a produção escreve-se $[q, A, q_1] \to a$),

é tal que

$$[q, A, p] \Rightarrow_G^\star x \quad sse \quad (q, x, A) \vdash_M^\star (p, \epsilon, \epsilon)$$

quaisquer que sejam $q, p \in Q$, $A \in \Gamma$, $x \in \Sigma^\star$. E, concluindo que $\mathcal{L}(G) = L$.