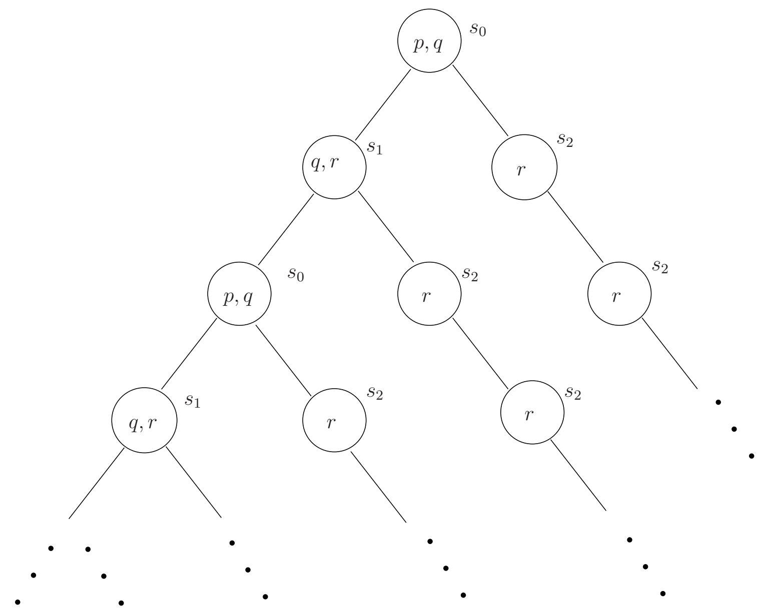
Aula 6

Lógica de tempo ramificado - CTL

A evolução de um sistema de transições corresponde a uma árvore de computação infinita. A lógica CTL (*Computation Tree Logic*) permite quantificação (existencial) sobre os caminhos dessa árvore.



Lógica de tempo ramificado - CTL

`Atoms`, conjunto de variáveis proposicionais $p, q, r, s, \ldots$

Sintaxe

$$\begin{aligned}\phi \quad ::= \quad & \bot \mid \top \mid p \mid (\neg\phi) \mid (\phi \wedge \phi) \mid (\phi \vee \phi) \mid (\phi \rightarrow \phi) \mid (\mathrm{AX}\phi) \mid \\ & (\mathrm{EX}\phi) \mid (\mathrm{AF}\phi) \mid (\mathrm{EF}\phi) \mid (\mathrm{AG}\phi) \mid (\mathrm{EG}\phi) \mid \mathrm{A}[\phi \mathrm{U} \phi] \mid \mathrm{E}[\phi \mathrm{U} \phi]\end{aligned}$$

Conectivas Temporais

A significa *ao longo de todos os caminhos*

E significa *ao longo de pelo menos um caminho*

F,G,X e U como no LTL

Lógica de tempo ramificado - CTL

As conectivas A e E só podem aparecer junto de uma das outras conectivas temporais.

Convensão de prioridades (omissão de parêntesis)

- As conectivas unárias ($\neg$, AX,EX, AF,EF,AG e EG) têm prioridade mais alta
- Depois as conectivas $\wedge$ e $\vee$.
- Depois as conectivas $\rightarrow$, AU e EU (estas duas últimas são escritas em notação infixa e prefixa simultaneamente)

Exemplos

$$\begin{array}{l} \mathrm{AG}(p \rightarrow \mathrm{EG}r) \\ \mathrm{EFE}[r\mathrm{U}q] \\ \mathrm{E}[\mathrm{A}[r\mathrm{U}p]\mathrm{U}q] \\ \mathrm{A}[\mathrm{AX}\neg p\mathrm{UE}[\mathrm{EX}(p \wedge q)\mathrm{U}\neg p]] \end{array}$$

1 Semântica do CTL

Exemplos:

Exprime as propriedades seguintes através de fórmulas em CTL.

- Existe um estado atingível onde se verifica p.
- A partir de todos os estados atingíveis, onde se verifica p, é possível manter p continuamente verdadeiro até chegar a um estado onde se verifica q.
- Sempre que se chega a um estado onde se verifica p, é possível manter q verdadeiro para sempre.
- Existe um estado atingível, a partir do qual se verifica p em todos os estados atingíveis.

Semântica do CTL

Satisfazibilidade

Dado um modelo $\mathcal{M} = (S, \rightarrow, L)$, um estado $s \in S$ e uma fórmula ϕ define-se a relação de satisfabilidade $\mathcal{M}, s \models \phi$ indutivamente na estrutura de ϕ:

1. $\mathcal{M}, s \models \top$ e $\mathcal{M}, s \not\models \bot$

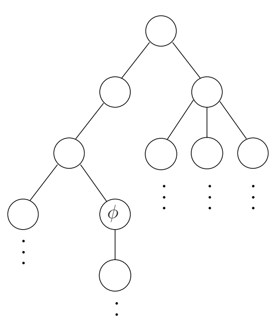
2. $\mathcal{M}, s \models p$ sse $p \in L(s)$
3. $\mathcal{M}, s \models \neg\phi$ sse $\mathcal{M}, s \not\models \phi$
4. $\mathcal{M}, s \models \phi \wedge \psi$ sse $\mathcal{M}, s \models \phi$ e $\mathcal{M}, s \models \psi$
5. $\mathcal{M}, s \models \phi \vee \psi$ sse $\mathcal{M}, s \models \phi$ ou $\mathcal{M}, s \models \psi$
6. $\mathcal{M}, s \models \phi \to \psi$ sse se $\mathcal{M}, s \models \phi$ então $\mathcal{M}, s \models \psi$
7. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{AX}\phi$ sse para todo s_1 tal que $s \to s_1$, $\mathcal{M}, s_1 \models \phi$
8. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{EX}\phi$ sse existe s_1 tal que $s \to s_1$ e $\mathcal{M}, s_1 \models \phi$

Semântica do CTL

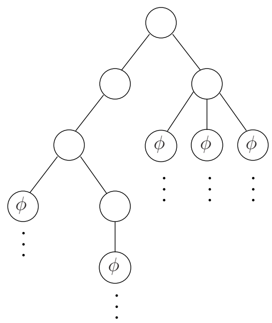
Satisfazibilidade (cont.)

9. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{AG}\phi$ sse para todos os caminhos $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$, se tem para todo $s_i \in \pi$ $\mathcal{M}, s_i \models \phi$
10. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{EG}\phi$ sse existe um caminho $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$ tal que para todo $s_i \in \pi$ $\mathcal{M}, s_i \models \phi$
11. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{AF}\phi$ sse para todos os caminhos $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$, existe $s_i \in \pi$ tal que $\mathcal{M}, s_i \models \phi$
12. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{EF}\phi$ sse existe um caminho $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$ tal que existe $s_i \in \pi$ tal que $\mathcal{M}, s_i \models \phi$
13. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{A}[\phi_1 \mathrm{U} \phi_2]$ sse para todos os caminhos $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$, se tem que $\phi_1 \mathrm{U} \phi_2$ é satisfeito, i.e. existe $s_i \in \pi$ $\mathcal{M}, s_i \models \phi_2$, e para $j < i$ $\mathcal{M}, s_j \models \phi_1$
14. $\mathcal{M}, s \models \mathrm{E}[\phi_1 \mathrm{U} \phi_2]$ sse existe um caminho $\pi = s_1 \to s_2 \cdots$ com $s_1 = s$, tal que $\phi_1 \mathrm{U} \phi_2$ é satisfeito, i.e. existe $s_i \in \pi$ $\mathcal{M}, s_i \models \phi_2$, e para $j < i$ $\mathcal{M}, s_j \models \phi_1$.

Semântica do CTL

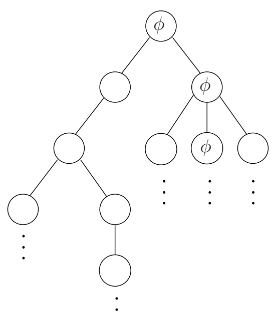


EFϕ

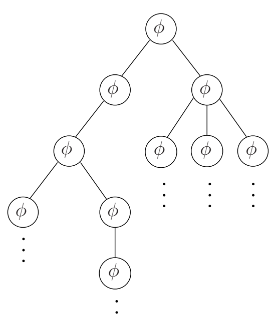


AFϕ

Semântica do CTL

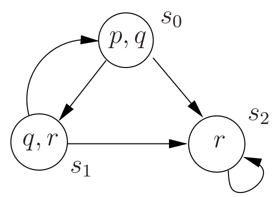


EGϕ



AGϕ

Exemplo



1. $\mathcal{M}, s_0 \models p \ \wedge \ q$
2. $\mathcal{M}, s_0 \models \mathrm{EX}r$
3. $\mathcal{M}, s_0 \models \neg\mathrm{AX}(q \ \wedge \ r)$
4. $\mathcal{M}, s_0 \models \neg\mathrm{EF}(p \ \wedge \ r)$
5. $\mathcal{M}, s_0 \models \mathrm{EG}r$
6. $\mathcal{M}, s_0 \models \mathrm{A}[p\mathrm{U}r]$

Especificação de algumas propriedades do CTL

Exercício 6.1. *Mostra que uma formula φ é satisfeita um número infinito de vezes ao longo de qualquer caminho a partir de s de um modelo $\mathcal{M}$ sse e*

$$\mathcal{M}, s \models AGAF\varphi$$

◇

Exemplos:

Exprime as propriedades seguintes através de fórmulas em CTL e/ou LTL.

- É possível atingir um estado onde se verifica `started` e onde `ready` é falso.(EF($started \wedge \neg ready$))
- Em qualquer estado, se se verificar `trying`, então existe um caminho onde `critical` se verifica mais tarde (non-blocking).(AG($trying \rightarrow$ EF$critical$))
- Um processo é `enabled` um número infinito de vezes ao longo de qualquer caminho.(AG(AF$enabled$))
- Ao longo de qualquer caminho, se `enabled` se verificar um número infinito de vezes, então `running` verifica-se um número infinito de vezes. Não é possível. Ver (AGAF$enabled \rightarrow$ AGAF$running$)
- De qualquer estado é possível atingir um estado onde se verifica `restart`.(AGEF$restart$)

Equivalência semântica

Equivalência de fórmulas

Duas fórmulas do CTL são semânticamente equivalentes, $\phi \equiv \psi$, se para todos os modelos $\mathcal{M}$ e todos os estados s em $\mathcal{M}$, $\mathcal{M}, s \models \phi$ sse $\mathcal{M}, s \models \psi$.

Teorema 6.1. *Temos as seguintes equivalências:*

$$\begin{array}{rcl} \neg AF\phi & \equiv & EG\neg\phi \\ \neg EF\phi & \equiv & AG\neg\phi \\ \neg AX\phi & \equiv & EX\neg\phi \\ AF\phi & \equiv & A[\top U\phi] \\ EF\phi & \equiv & E[\top U\phi] \end{array}$$

Conjuntos completos de conectivas

Teorema 6.2. *Considerando as conectivas temporais, os seguintes conjuntos são completos:* $\{AU, EU, EX\}$ *e* $\{EG, EU, EX\}$.

Teorema 6.3. *Um conjunto de conectivas temporais do CTL é completo se contiver pelo menos um elemento do conjunto* $\{AX, EX\}$*, um do conjunto* $\{EG, AF, AU\}$ *e* EU.

Mais equivalências

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{AG}\phi & \equiv & \phi \wedge \mathrm{AXAG}\phi \\ \mathrm{EG}\phi & \equiv & \phi \wedge \mathrm{EXEG}\phi \\ \mathrm{AF}\phi & \equiv & \phi \vee \mathrm{AXAF}\phi \\ \mathrm{EF}\phi & \equiv & \phi \vee \mathrm{EXEF}\phi \end{array}$$