

Bases de Dados

Parte IX

Organização Física dos Dados

Unidades de Medida da Informação

- A unidade fundamental é o byte.
- 1 byte corresponde a 8 bits e cada bit permite representar ou um 0 ou um 1.
- 1 Kilobyte (Kbyte ou KB) = 2^{10} bytes = 1024 bytes
- 1 Megabyte (Mbyte ou MB) = 2^{20} bytes = 1024 Kbytes
- 1 Gigabyte (Gbyte ou GB) = 2^{30} bytes = 1024 Mbytes
- 1 Terabyte (Tbyte ou TB) = 2^{40} bytes = 1024 Gbytes
- 1 Petabyte (Pbyte ou PB) = 2^{50} bytes = 1024 Tbytes

Dispositivos de Armazenamento da Informação

- **Memória cache:** memória utilizada para acelerar a execução de programas; é o tipo de memória com o menor tempo de acesso.
- **Memória principal ou RAM:** área de trabalho principal do CPU; dispositivo volátil; menor custo que memória cache mas mais lenta.
- **Memória flash:** memória não-volátil de leitura rápida; utilizada em dispositivos de vídeo, fotografia, MP3 e acessórios USB; maior custo e mais lenta na escrita que memória RAM.
- **Disco:** dispositivo de menor custo e de maior capacidade que a memória.
- **DVD:** disco óptico de escrita única e de limitada capacidade (4.5 a 15 Gbytes por disco).
- **CD-ROM:** menos recente que o DVD e de menor capacidade (640 a 870 Mbytes por disco).
- **Fita magnética (tape):** utilizado essencialmente para cópias de segurança (*backups*); é o dispositivo mais barato de armazenamento.

Menor tempo
de acesso



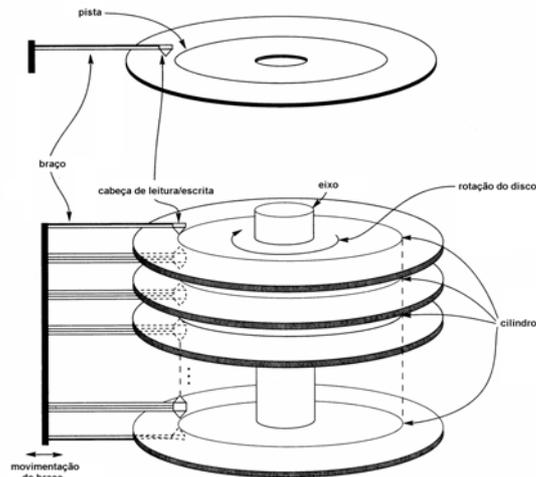
Menor custo

Armazenamento da Informação em BDs

- Onde guardar os dados que constituem uma BD?
 - Os dados são tipicamente armazenados em disco.
- Usam-se discos para as bases de dados porque as bases de dados possuem grandes volumes de informação que têm de existir durante grandes períodos de tempo:
 - Em geral, uma BD é demasiado grande para caber totalmente em memória.
 - Menor risco de perdas de informação pois os discos são não-voláteis.
 - Menor custo.
- O acesso a uma parte da base de dados envolve:
 - Localizar em disco a parte da base de dados que se pretende aceder.
 - Copiar essa parte para a memória principal para processamento.
 - Em caso de alteração, reescrever essa parte no disco.
- Para obter boa performance, é importante conhecer técnicas de armazenamento da informação em disco.

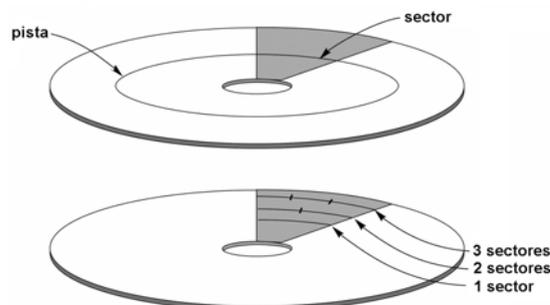
Discos

- Os discos são habitualmente constituídos por várias **placas** circulares empilhadas com cabeças de leitura/escrita independentes.
- Cada placa contém um conjunto de **pistas** circulares e concêntricas (capacidade até 150 Kbytes).
- O conjunto das várias pistas com o mesmo diâmetro nas várias placas constitui um **cilindro**.
- A informação guardada num mesmo cilindro pode ser acedida mais rapidamente.



Discos

- Cada pista é normalmente dividida em **sectores** e **blocos** de tamanho fixo.
- A divisão em sectores é feita pelo fabricante e não pode ser alterada. O tamanho típico dos sectores é de 512 bytes.
- A divisão em blocos (ou páginas) é feita pelo sistema operativo quando o disco é formatado. O tamanho típico dos blocos varia entre 512 bytes e 4 Kbytes.

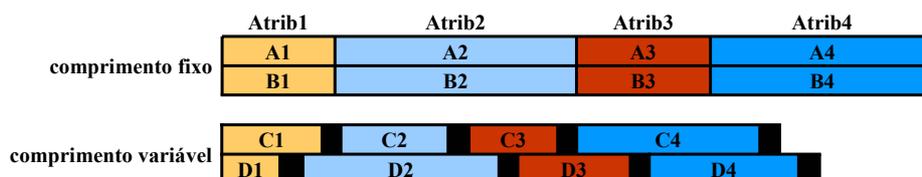


Discos

- A transferência de dados entre a memória e o disco é feita em unidades de blocos.
- A leitura de um bloco do disco está condicionada por vários factores:
 - Tempo de posicionamento da cabeça de leitura na pista correcta (*seek time*).
 - Tempo de rotação do disco até que o bloco pretendido fique em posição (*latency time*).
 - Tempo de transferência de um bloco do disco para a memória (*block transfer time*).
- O tempo de posicionamento varia entre 7 a 10 ms para discos comuns.
- O tempo de rotação depende da velocidade de rotação (2 ms para um disco de 15.000 rpm).
 - $15.000 \text{ rpm} = 250 \text{ rps} = 4 \text{ ms por rotação} = 2 \text{ ms em média para rodar até o bloco pretendido}$
- O tempo de transferência depende do tamanho do bloco, do tamanho da pista e da velocidade de rotação (0.4 ms para um disco de 15.000 rpm, com 4 Kbytes por pista e blocos de 4 Kbytes).
 - $40/4 = 10 \text{ blocos por pista} = 0.4 \text{ ms para transferir um bloco}$

Registos

- Os dados de uma BD são normalmente guardados em ficheiros de registos.
- Um registo é um conjunto de valores que representam os atributos de um tuplo de uma relação.
- O formato de um registo é definido pelo tipo de dados dos atributos associados à tabela que o registo representa (definido pelo CREATE TABLE).
- Os registos podem ter comprimento fixo ou variável (depende do tipo de dados). Se tiverem comprimento variável é necessário utilizar caracteres especiais para separar os valores do registo.



Registos

- Dado que a unidade de transferência para o disco é o bloco, para guardarmos os dados de uma BD em disco temos de associar registos com blocos em disco.
- Se o tamanho do bloco for B bytes e o tamanho do registo for R bytes (supondo que $B \geq R$) então o número de registos por bloco (*blocking factor* ou *bfr*) é B/R .
- Uma organização que obrigue os registos a pertencerem a um único bloco pode levar a desperdício de espaço nos blocos (pois em geral B não é um múltiplo de R).
- Uma alternativa é permitir que os registos atravessem mais do que um bloco. Para tal, utiliza-se um apontador no final dos blocos para indicar o bloco onde está a restante informação do registo. Esta organização é igualmente utilizada quando o tamanho dos registos excede o tamanho dos blocos ou quando os registos têm comprimento variável.

Ficheiros de Registos

- Para além da associação entre registos e blocos em disco é também importante conhecer a organização do ficheiro de registos, isto é, como é que os registos são organizados em disco e como são interligados:
 - Ficheiros não-ordenados (*heap files*)
 - Ficheiros ordenados (*sorted files*)
 - Ficheiros de acesso directo (*hash files*)
- O objectivo de uma boa organização é minimizar o número de transferências de blocos do disco para a memória que são necessárias para localizar um determinado registo.

Operações sobre Ficheiros de Registos

- **Operações de leitura:** não alteram o ficheiro, apenas localizam determinados registos para que os seus valores possam ser lidos.
- **Operações de escrita:** alteram o ficheiro removendo ou adicionando registos ou alterando valores nos registos existentes.
- Estas operações são normalmente implementadas pelos SGBDs por utilização de operações mais básicas que manipulam apenas um registo de cada vez:
 - **FindNext:** procura o registo seguinte que satisfaz a condição de selecção, transfere o bloco que contém esse registo para um *buffer* em memória (se não estiver já lá) e coloca o apontador do registo corrente a apontar para o início do registo.
 - **Delete:** remove o registo corrente e escreve o bloco respectivo para o disco.
 - **Insert:** localiza o bloco onde o novo registo deve ser inserido, transfere esse bloco para memória (*buffer*), escreve o registo no bloco em *buffer* e escreve o bloco para o disco.
 - ...

Ficheiros Não-Ordenados

- Tipo de organização mais simples e básica.
 - Os registos são colocados no ficheiro pela ordem que são inseridos.
 - Novos registos são adicionados no fim do ficheiro.
- Vantagens
 - Inserir um novo registo é muito eficiente: o último bloco do ficheiro é copiado para memória, o novo registo é adicionado e o bloco é reescrito para o disco. O endereço do último bloco do ficheiro é guardado no cabeçalho do ficheiro.
- Desvantagens
 - Procurar um registo é dispendioso: envolve pesquisa linear sobre os blocos em disco.
 - Remover registos leva a desperdício de espaço (blocos com buracos): é necessário reorganizar periodicamente o ficheiro para recuperar espaço.
 - Obter dados ordenados é dispendioso: é necessário criar uma cópia auxiliar do ficheiro com os registos ordenados.

Ficheiros Ordenados

- Tipo de organização em que os registos estão fisicamente ordenados (nos blocos) com base nos valores de um dos atributos (**atributo de ordenação**).
- Se o atributo de ordenação é um atributo chave então é designado como **chave de ordenação**.

(atributo de ordenação)

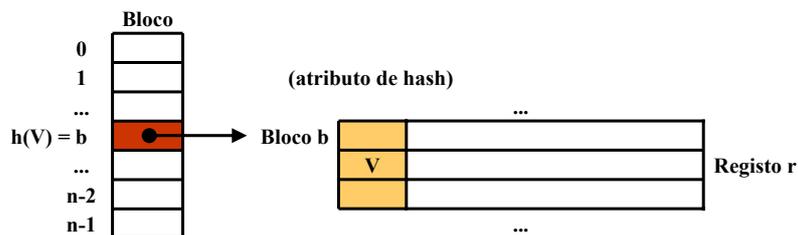
| | Atrib1 | Atrib2 | Atrib3 | Atrib4 |
|---------|----------|--------|--------|--------|
| Bloco 1 | Ana | | | |
| | Anabela | | | |
| | António | | | |
| Bloco 2 | Carlos | | | |
| | Catarina | | | |
| | Daniel | | | |
| ... | | | | |
| Bloco n | Teresa | | | |
| | Tiago | | | |
| | Zacarias | | | |

Ficheiros Ordenados

- Vantagens
 - Aceder aos registos por ordem do atributo de ordenação é muito eficiente: não requer ordenação e o registo seguinte está normalmente no mesmo bloco.
 - Procurar um registo com base num valor do atributo de ordenação é muito eficiente se usarmos pesquisa binária o tempo médio de acesso para B blocos é $\log_2 B$.
- Desvantagens
 - Procurar ou obter dados ordenados com base em outros atributos (diferentes do atributo de ordenação) é igual a ficheiros não-ordenados.
 - Inserir e remover registos são operações dispendiosas: os registos têm de permanecer ordenados após estas operações. A inserção obriga a arranjar espaço para o registo a inserir o que, em média, leva a deslocar metade dos registos para outros blocos para libertar espaço. Podemos melhorar a inserção usando um ficheiro de transacções e fazendo periodicamente a junção desse ficheiro com o ficheiro ordenado (em contrapartida o algoritmo de procura fica mais complexo e menos eficiente).

Ficheiros de Acesso Directo

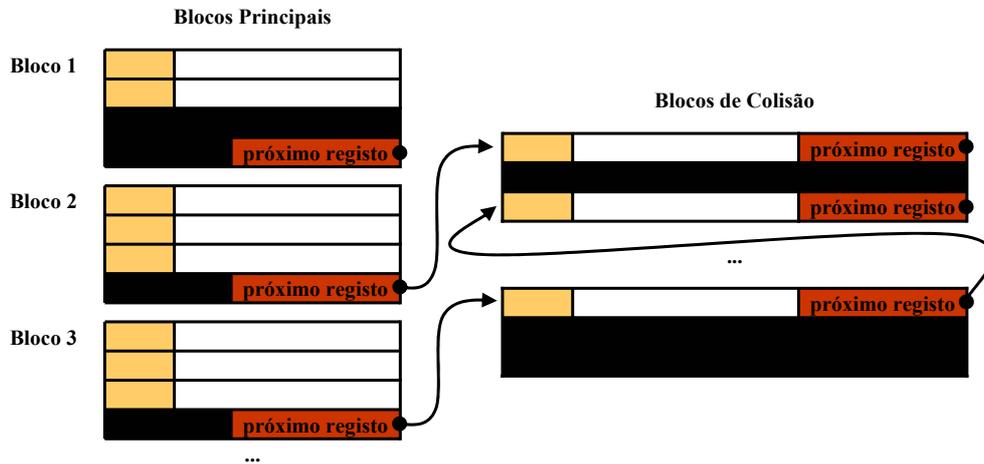
- Tipo de organização em que os registos são associados a blocos por utilização de uma **função de hashing** sobre os valores de um dos atributos (**atributo de hash**).
 - O registo r com valor V no atributo de *hash* é armazenado no bloco em disco b , em que $b = h(V)$ e h é a função de *hashing*.
 - O endereço dos blocos em disco é mantido numa tabela de tamanho fixo que é guardada no cabeçalho do ficheiro.



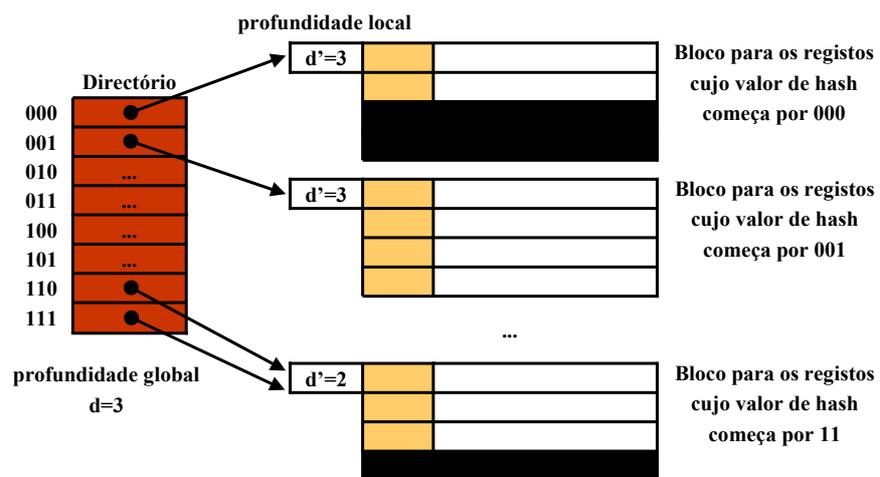
Ficheiros de Acesso Directo

- Vantagens
 - Procurar um registo com base num valor do atributo de *hash* é muito eficiente: normalmente só precisamos de aceder a um único bloco para obter o registo.
- Desvantagens
 - Procurar registos com base em outros atributos (diferentes do atributo de *hash*) é igual a ficheiros não-ordenados.
 - Problemas de colisão: ocorre uma colisão quando a função de *hashing* associa um novo registo a um bloco em disco que já está cheio. Os registos de colisão são armazenados em blocos (auxiliares) de colisão.
 - O facto do número de blocos ser fixo pode levar a desperdício de espaço (existência de menos registos do que o esperado) ou a um grande número de colisões (existência de mais registos do que o esperado). Quando existe uma grande discrepância entre o número de registos armazenados e esperados podemos alocar um novo número de blocos e utilizar uma nova função de *hashing* para redistribuir os registos existentes. Em alternativa podemos utilizar técnicas de *hashing* com expansão dinâmica.

Ficheiros de Acesso Directo com Blocos de Colisão



Ficheiros de Acesso Directo com Expansão Dinâmica



Índices

- **Índices** ou **estruturas de acesso secundárias** são estruturas de dados auxiliares que visam minimizar o tempo de acesso a registos em resposta a operações de procura sobre determinados atributos.
- Os índices são construídos tendo por base os valores de um dos atributos (**atributo de indexação**).
 - Qualquer atributo pode ser utilizado para construir um índice.
 - Diferentes atributos podem ser utilizados para construir múltiplos índices.
- Os índices não alteram a disposição física dos registos nos blocos em disco.

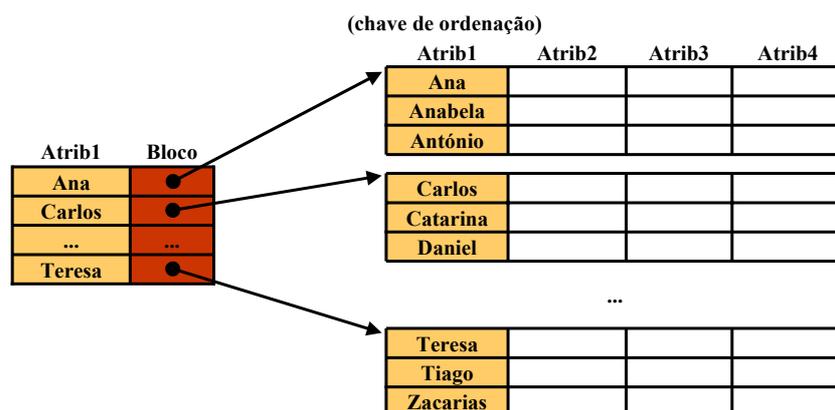
Índices

- Os índices são guardados em **ficheiros ordenados pelo atributo de indexação**. Cada entrada no ficheiro de índices é composta por:
 - Um valor do atributo de indexação.
 - Um apontador para o bloco que possui o registo com esse valor ou um apontador para o bloco que possui apontadores para os registos com esse valor.
- A ideia é que sendo o ficheiro de índices mais pequeno que o ficheiro de registos, podemos tê-lo em memória e usá-lo para localizar mais depressa os registos nos blocos em disco.
- Existem vários tipos de ficheiros ordenados de índices:
 - Índices primários
 - Índices *cluster*
 - Índices secundários

Índices Primários

- Um índice primário é um índice construído sobre um ficheiro ordenado por um atributo chave (**chave de ordenação**). O atributo de indexação de um índice primário é a **chave de ordenação do ficheiro ordenado**.
- Um índice primário possui uma entrada para cada bloco em disco no ficheiro de registos. Cada entrada num índice primário é composta por:
 - O valor da chave de ordenação do primeiro registo do bloco.
 - O apontador para esse bloco.
- O total de entradas num índice primário é igual ao número de blocos em disco no ficheiro de registos.
- Um índice primário é um **índice esparso**. Um índice diz-se esparso se não tiver uma entrada para cada registo existente. Caso contrário, diz-se denso.
- O maior inconveniente de um índice primário é inserir e remover registos pois obriga a ordenação no ficheiro de registos e no ficheiro de índices.

Índices Primários



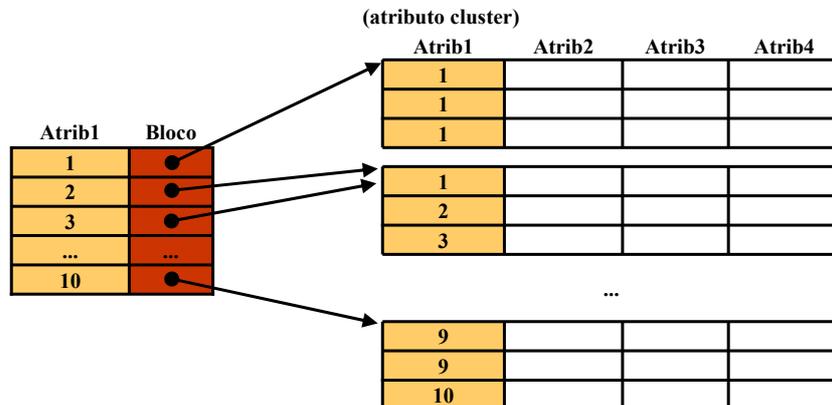
Índices Primários

- Considere um ficheiro ordenado com $r = 30.000$ registos guardado num disco com blocos de $B = 1024$ bytes. Os registos têm um tamanho fixo de $R = 100$ bytes e não atravessam blocos.
 - O *blocking factor* é $bfr = \lfloor B/R \rfloor = \lfloor 1024/100 \rfloor = 10$ registos por bloco.
 - O número de blocos necessários para o ficheiro é $b = \lceil r/bfr \rceil = \lceil 30.000/10 \rceil = 3000$ blocos.
 - Pesquisa binária sobre o ficheiro necessita no máximo de $\lceil \log_2 b \rceil = \lceil \log_2 3000 \rceil = 12$ acessos a blocos.
- Considere agora a construção de um índice primário com um atributo de indexação de $V = 9$ bytes e um apontador para blocos de $P = 6$ bytes.
 - Cada entrada no ficheiro de índices ocupa $R_i = V + P = 15$ bytes.
 - O número de entradas no ficheiro de índices é $r_i = b = 3000$ entradas.
 - O *blocking factor* no ficheiro de índices é $bfr_i = \lfloor B/R_i \rfloor = \lfloor 1024/15 \rfloor = 68$ registos por bloco.
 - O número de blocos necessários para o ficheiro de índices é $b_i = \lceil r_i/bfr_i \rceil = 45$ blocos.
 - Pesquisa binária sobre o ficheiro de índices necessita no máximo de $\lceil \log_2 b_i \rceil = \lceil \log_2 45 \rceil = 6$ acessos a blocos.
- Para encontrar um registo utilizando o ficheiro de índices é necessário no máximo $6 + 1 = 7$ **acessos a blocos a disco**, ou seja, **menos 5 acessos do que sem o ficheiro de índices**.

Índices Cluster

- Um índice *cluster* é um índice construído sobre um ficheiro ordenado por um atributo não chave, ou seja, que pode ter registos com valores iguais para esse atributo (**atributo cluster**). O atributo de indexação de um índice *cluster* é o **atributo cluster do ficheiro ordenado**.
- Um índice *cluster* possui uma entrada para cada valor distinto do atributo *cluster*. Cada entrada num índice *cluster* é composta por:
 - O valor do atributo *cluster*.
 - O apontador para o primeiro bloco que possui um registo com esse valor.
- Um índice *cluster* é um **índice esparso**.
- O maior inconveniente de um índice *cluster* é igualmente inserir e remover registos pois obriga a ordenação no ficheiro de registos e no ficheiro de índices.

Índices Cluster

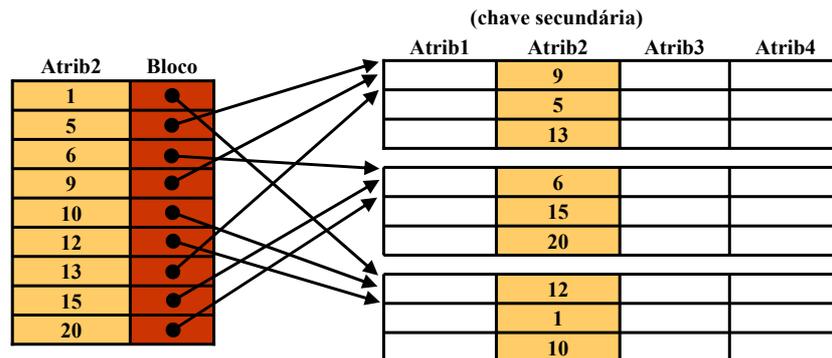


Índices Secundários

- Um índice secundário é um índice construído sobre um ficheiro para o qual já existe um outro meio de acesso primário. O atributo de indexação de um índice secundário pode ser um **atributo chave candidata (chave secundária)** ou um **atributo não chave do ficheiro**.
- Um índice secundário possui uma entrada para cada valor distinto do atributo de indexação. Cada entrada num índice secundário é composta por:
 - O valor do atributo de indexação.
 - O apontador para o bloco que possui o registo com esse valor ou o apontador para o bloco que possui apontadores para os registos com esse valor.
- É possível ter vários índices secundários para o mesmo ficheiro.
- Normalmente, um índice secundário requer mais espaço e maior tempo de procura do que um índice primário. No entanto, o ganho no tempo de procura conseguido com um índice secundário é incomparavelmente superior ao conseguido com um índice primário.

Índices Secundários

- Quando o atributo de indexação é uma **chave secundária** então um índice secundário é um **índice denso**. Cada entrada no índice é composta por:
 - O valor da chave secundária.
 - O apontador para o bloco que possui o registo com esse valor.

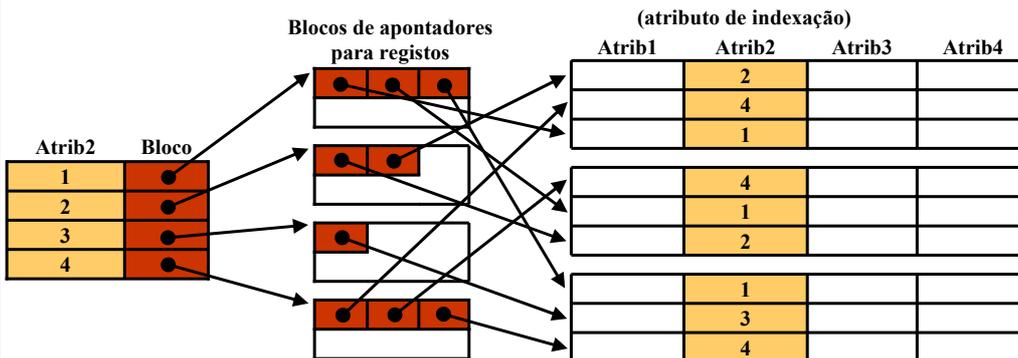


Índices Secundários

- Considere novamente um ficheiro com $r = 30.000$ registos guardado num disco com blocos de $B = 1024$ bytes. Os registos têm um tamanho fixo de $R = 100$ bytes e não atravessam blocos.
 - O *blocking factor* é $bfr = \lfloor B/R \rfloor = \lfloor 1024/100 \rfloor = 10$ registos por bloco.
 - O número de blocos necessários para o ficheiro é $b = \lceil r/bfr \rceil = \lceil 30.000/10 \rceil = 3000$ blocos.
 - Pesquisa linear sobre o ficheiro necessita em média de $b/2 = 3000/2 = 1500$ acessos a blocos.
- Considere agora a construção de um índice secundário com um atributo de indexação de $V = 9$ bytes e um apontador para blocos de $P = 6$ bytes.
 - Cada entrada no ficheiro de índices ocupa $R_i = V + P = 15$ bytes.
 - O número de entradas no ficheiro de índices é $r_i = r = 30.000$ entradas.
 - O *blocking factor* no ficheiro de índices é $bfr_i = \lfloor B/R_i \rfloor = \lfloor 1024/15 \rfloor = 68$ registos por bloco.
 - O número de blocos necessários para o ficheiro de índices é $b_i = \lceil r_i/bfr_i \rceil = \lceil 30.000/68 \rceil = 442$ blocos.
 - Pesquisa binária sobre o ficheiro de índices necessita no máximo de $\lceil \log_2 b_i \rceil = \lceil \log_2 442 \rceil = 9$ acessos a blocos.
- Para encontrar um registo utilizando o ficheiro de índices é necessário no máximo $9 + 1 = 10$ acessos a blocos a disco, ou seja, **menos 1490 acessos do que sem o ficheiro de índices.**

Índices Secundários

- Quando o atributo de indexação é um atributo não chave então um índice secundário é um **índice esparsos**. Cada entrada no índice é composta por:
 - O valor do atributo de indexação.
 - O apontador para o bloco que possui apontadores para os registos com esse valor.



Índices

| Tipo de Índice | Atributo de Indexação é | | Número de Entradas | Densidade |
|------------------------|-------------------------|-----------------------|----------------------|-----------|
| | Atributo Chave | Atributo de Ordenação | | |
| Primário | Sim | Sim | Blocos do ficheiro | Esparso |
| Cluster | Não | Sim | Valores distintos | Esparso |
| Secundário (chave) | Sim | Não | Registos do ficheiro | Denso |
| Secundário (não chave) | Não | Não | Valores distintos | Esparso |

Índices de Níveis Múltiplos

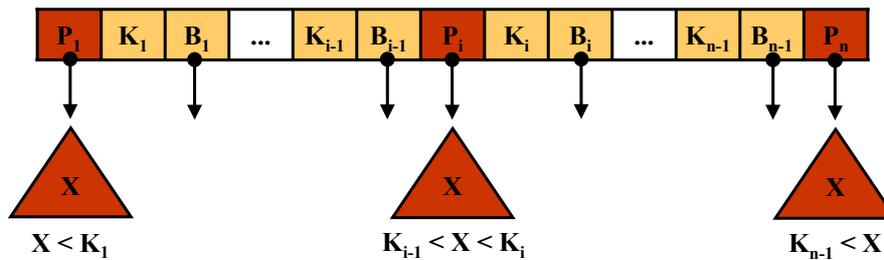
- Considere novamente o índice secundário anterior com $b_1 = 442$ blocos necessários para o ficheiro de índices e com um *blocking factor* de $bfr_1 = 68$ registos por bloco.
- Considere agora a construção de um índice de níveis múltiplos a partir do índice secundário.
 - O número de blocos do primeiro nível é $b_1 = b_i = 442$ blocos.
 - O número de blocos necessários para o segundo nível é $b_2 = \lceil b_1/bfr_1 \rceil = \lceil 442/68 \rceil = 7$ blocos.
 - O número de blocos necessários para o terceiro nível é $b_3 = \lceil b_2/bfr_1 \rceil = \lceil 7/68 \rceil = 1$ bloco, ou seja, o terceiro nível é o nível de topo.
- Para encontrar um registo utilizando o índice de níveis múltiplos é necessário aceder a um bloco por cada nível mais o bloco do ficheiro de registos, ou seja, $3 + 1 = 4$ acessos a blocos a disco, o que equivale no máximo a **menos 6 acessos do que com apenas o índice secundário**.

Árvores B e Árvores B⁺

- Por forma a simplificar as operações de inserção e remoção, os índices de níveis múltiplos são normalmente implementados como árvores B ou árvores B⁺.
- A ideia chave das árvores B e B⁺ é tentar manter algum espaço livre nos nós da árvore de modo a permitir a eficiente inserção e remoção de valores. **Cada nó corresponde a um bloco em disco** e está sempre com a sua capacidade entre 50% a 100% ocupada.
- A inserção de valores num nó não completo é muito eficiente. A inserção num nó completo causa uma separação em dois nós. Esta separação pode propagar-se a outros nós.
- A remoção de valores é muito eficiente se o nó respectivo não ficar com menos do que 50% da sua capacidade. Se isso acontecer, o nó é agrupado a nós vizinhos. Este agrupamento pode propagar-se a outros nós.
- Por experimentação verificou-se que as árvores B e B⁺ quando estabilizam ficam, **em média, com 69% de cada nó ocupado**.

Árvores B

- Estrutura dos nós de uma árvore B.

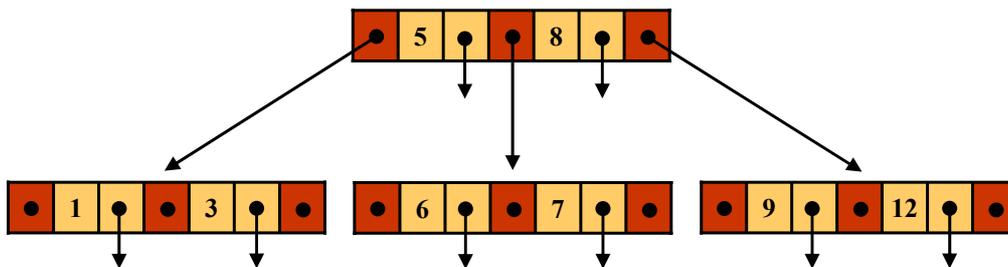


Árvores B

- Uma árvore B de ordem p é definida como:
 - Cada nó é da forma $\langle P_1, (K_1, B_1), \dots, (K_{i-1}, B_{i-1}), P_i, (K_i, B_i), \dots, (K_{n-1}, B_{n-1}), P_n \rangle$, em que $n \leq p$, cada P_i é um apontador para uma sub-árvore B, e cada par (K_i, B_i) é uma entrada em que B_i é o apontador para o bloco em disco que possui o registo com o valor de pesquisa K_i .
 - Em cada nó têm-se que $K_1 < \dots < K_{i-1} < K_i < \dots < K_{n-1}$.
 - Para qualquer valor de pesquisa X na sub-árvore apontada por P_i têm-se que $X < K_i$ para $i = 1$ ou $K_{i-1} < X < K_i$ para $1 < i < n$ ou $K_{n-1} < X$ para $i = n$.
 - Cada nó tem no máximo p apontadores para sub-árvores.
 - Cada nó, excepto o nó raiz e os nós folha, tem pelo menos $\lceil p/2 \rceil$ apontadores para sub-árvores. O nó raiz tem pelo menos 2 apontadores para sub-árvores a menos que seja o único nó da árvore.
 - Um nó com n apontadores para sub-árvores, $n \leq p$, tem n - 1 pares de entradas (K_i, B_i) .
 - Todos os nós folha ficam no mesmo nível da árvore. Os apontadores para sub-árvores dos nós folha são todos NULL.

Árvores B

- Árvore B de ordem $p = 3$.



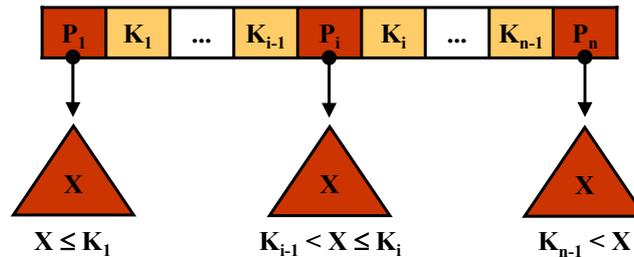
Árvores B

- Considere a construção de uma árvore B com um atributo de indexação de $V = 9$ bytes, um apontador para blocos de $P = 6$ bytes e um disco com blocos de $B = 512$ bytes.
 - Cada nó tem p apontadores (para sub-árvores) e $p - 1$ pares de entradas (valor de pesquisa/apontador para bloco de registos):

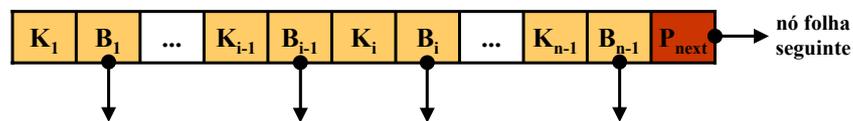
$$(p * P) + (p - 1) * (P + V) \leq B \Leftrightarrow (p * 6) + (p - 1) * (6 + 9) \leq 512 \Rightarrow p = 25$$
 - A média de ocupação por nó é de $25 * 0.69 \approx 17$ apontadores e 16 entradas.
- Em média, uma árvore B de ordem $p = 25$ tem a seguinte distribuição:
 - Raíz: 1 nó 17 apontadores 16 entradas
 - Nível 1: 17 nós 289 apontadores 272 entradas
 - Nível 2: 289 nós 4913 apontadores 4624 entradas
 - Nível 3: 4913 nós 0 apontadores 78.608 entradas
 - Apontadores para blocos de registos: $16 + 272 + 4624 + 78.608 = 83.520$

Árvores B⁺

- Estrutura dos nós internos de uma árvore B⁺.



- Estrutura dos nós folha de uma árvore B⁺.



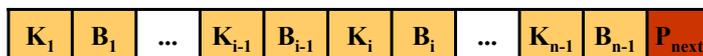
Árvores B⁺

- Os nós internos de uma árvore B⁺ de ordem p são definidos como:
 - Cada nó interno é da forma $\langle P_1, K_1, \dots, K_{i-1}, P_i, K_i, \dots, K_{n-1}, P_n \rangle$, em que $n \leq p$, cada P_i é um apontador para uma sub-árvore B⁺, e cada K_i é uma entrada para um valor de pesquisa.
 - Em cada nó interno têm-se que $K_1 < \dots < K_{i-1} < K_i < \dots < K_{n-1}$.
 - Para qualquer valor de pesquisa X na sub-árvore apontada por P_i têm-se que $X \leq K_i$ para $i = 1$ ou $K_{i-1} < X \leq K_i$ para $1 < i < n$ ou $K_{i-1} < X$ para $i = n$.
 - Cada nó interno tem no máximo p apontadores para sub-árvores.
 - Cada nó interno, excepto o nó raiz, tem pelo menos $\lceil p/2 \rceil$ apontadores para sub-árvores. O nó raiz tem pelo menos 2 apontadores para sub-árvores a menos que seja o único nó da árvore.
 - Um nó interno com n apontadores para sub-árvores, $n \leq p$, tem $n - 1$ valores de pesquisa.



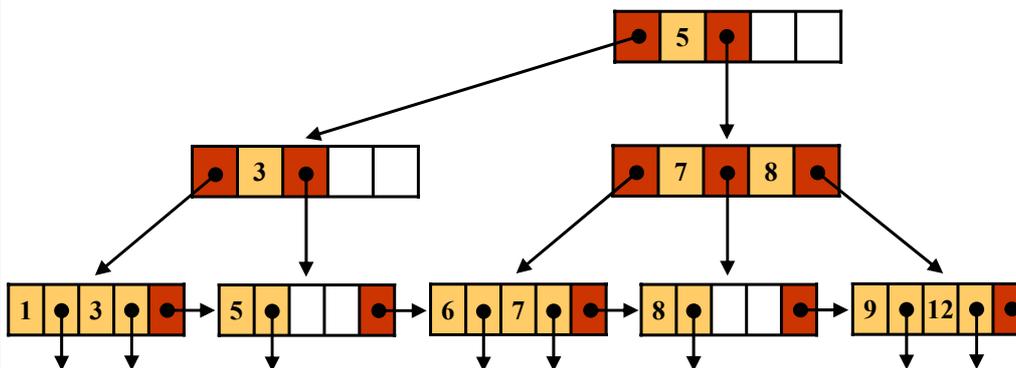
Árvores B⁺

- Os nós folha de uma árvore B⁺ de ordem p' são definidos como:
 - Cada nó folha é da forma $\langle (K_1, B_1), \dots, (K_{i-1}, B_{i-1}), (K_i, B_i), \dots, (K_{n-1}, B_{n-1}), P_{next} \rangle$, em que $n \leq p'$, cada par (K_i, B_i) é uma entrada em que B_i é o apontador para o bloco em disco que possui o registo com o valor de pesquisa K_i , e P_{next} é um apontador para o próximo nó folha.
 - Em cada nó folha têm-se que $K_1 < \dots < K_{i-1} < K_i < \dots < K_{n-1}$.
 - Cada nó folha tem pelo menos $\lceil p'/2 \rceil$ pares de entradas (K_i, B_i) .
 - Todos os nós folha ficam no mesmo nível da árvore.



Árvores B⁺

- Árvore B⁺ de ordem p = 3 nos nós internos e ordem p' = 2 nos nós folha.



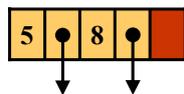
Árvores B⁺

- Considere a construção de uma árvore B⁺ com um atributo de indexação de $V = 9$ bytes, um apontador para blocos de $P = 6$ bytes e um disco com blocos de $B = 512$ bytes.
 - Cada nó interno tem p apontadores (para sub-árvores) e $p - 1$ entradas (valores de pesquisa):
 $(p * P) + (p - 1) * V \leq B \Leftrightarrow (p * 6) + (p - 1) * 9 \leq 512 \Rightarrow p = 34$
 - A média de ocupação por nó interno é de $34 * 0.69 \approx 23$ apontadores e 22 entradas.
 - Cada nó folha tem p' pares de entradas (valor de pesquisa/apontador para bloco de registos) e um apontador (para o próximo nó folha):
 $p' * (V + P) + P \leq B \Leftrightarrow p' * (9 + 6) + 6 \leq 512 \Rightarrow p' = 33$
 - A média de ocupação por nó folha é de $33 * 0.69 \approx 22$ entradas.
- Em média, uma árvore B⁺ de ordem $p = 34$ e $p' = 33$ tem a seguinte distribuição:

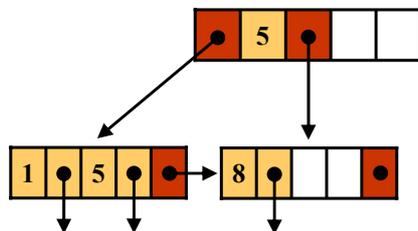
| | | | |
|--------------|------------|--|-----------------|
| ■ Raíz: | 1 nó | 23 apontadores | 22 entradas |
| ■ Nível 1: | 23 nós | 529 apontadores | 506 entradas |
| ■ Nível 2: | 529 nós | 12.167 apontadores | 11.638 entradas |
| ■ Nós folha: | 12.167 nós | 12.167 * 22 = 267.674 apontadores para blocos de registos | |

Inserção em Árvores B⁺

- Inserindo os valores 8 e 5.

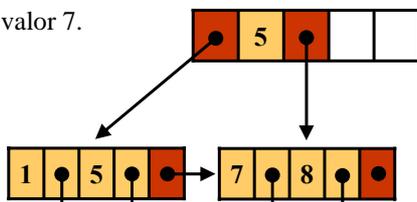


- Inserindo o valor 1 (*overflow*: novo nível).

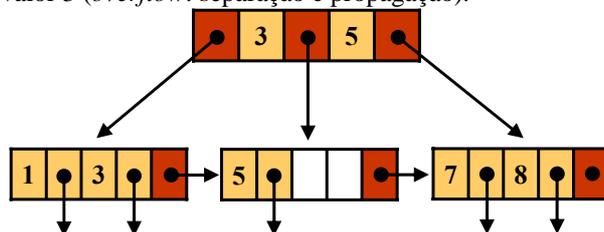


Inserção em Árvores B⁺

- Inserindo o valor 7.

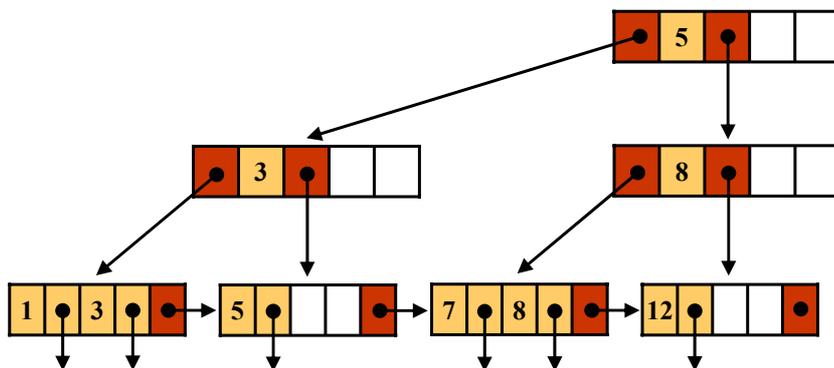


- Inserindo o valor 3 (*overflow*: separação e propagação).



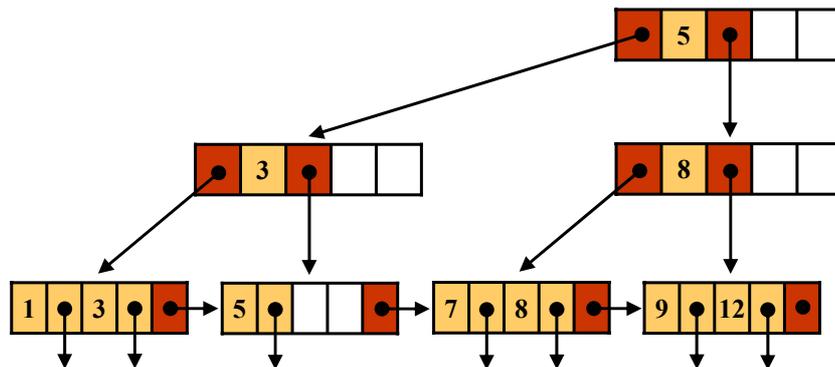
Inserção em Árvores B⁺

- Inserindo o valor 12 (*overflow*: separação, propagação e novo nível).



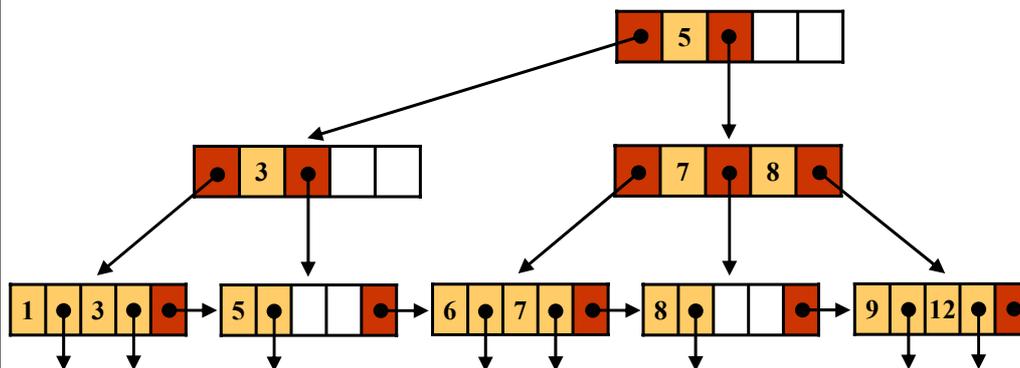
Inserção em Árvores B⁺

■ Inserindo o valor 9.



Inserção em Árvores B⁺

■ Inserindo o valor 6 (*overflow*: separação e propagação).



Índices sobre Atributos Múltiplos

- Também é possível construir índices sobre mais do que um atributo. A diferença é que em lugar de termos apenas um atributo de indexação, temos um tuplo com n atributos de indexação. Por exemplo, um índice construído sobre dois atributos Atrib1 e Atrib2 tem como tuplo de indexação o par <Atrib1, Atrib2>.
- Os índices sobre atributos múltiplos são guardados em **ficheiros ordenados pelo tuplo de indexação**. Cada entrada no ficheiro de índices é composta por:
 - Um tuplo de valores dos atributos de indexação.
 - Um apontador para o bloco que possui o registo com esses valores ou um apontador para o bloco que possui apontadores para os registos com esses valores.
- Todas as estruturas de dados referidas anteriormente para construir índices sobre atributos únicos podem ser adaptadas para construir índices sobre atributos múltiplos.

Índices em SQL

- Criar um ficheiro de índices sobre os atributos de uma dada tabela:

```
CREATE [UNIQUE] INDEX <NOME>  
ON <TABELA>(<ATRIB_1> [DESC], ..., <ATRIB_N> [DESC]);
```

 - A opção **UNIQUE** indica que não existem valores iguais para os atributos de indexação.
 - A opção **DESC** indica que a ordenação do atributo correspondente deve ser feita por ordem descendente.
- Remover um índice quando este não é mais necessário.

```
DROP INDEX <ÍNDICE>;
```

Índices em SQL

- Indexar a relação DEPARTAMENTO com base no atributo Nome.

```
CREATE UNIQUE INDEX DNome_INDEX
```

```
ON DEPARTAMENTO(Nome);
```

- Indexar a relação EMPREGADO com base nos atributos NomeP (ordem descendente) e NomeF.

```
CREATE INDEX ENome_INDEX
```

```
ON EMPREGADO(NomeP DESC, NomeF);
```

- Remover os índices definidos anteriormente.

```
DROP INDEX DNome_INDEX;
```

```
DROP INDEX ENome_INDEX;
```