Complexidade 2006/2007

Reduções polinomiais entre "Clique", "cobertura por vértices" e "conjunto independente"

FCUP/DCC (com algumas resoluções) Docente: Armando Matos

Seja $G = (V, E)$ um grafo não dirigido e k um inteiro com $0 \leq k \leq n$. São conhecidos os problemas "clique" e "cobertura por vértices" (VC). O problema "conjunto independente" (IS) é o seguinte

Instância: Um grafo não dirigido $G = (V, E)$ e um inteiro k com $0 \leq k \leq n$.

Pergunta: Existe um subconjunto independente de vértices V' (subconjunto de V) de tamanho k? Nota: um subconjunto de vértices diz-se independente se não existe qualquer ramo com ambas as extremidades em V', isto é, $[(a, b) \in E] \Rightarrow [a \notin V' \wedge b \notin V']$.

1. Mostre que $\propto$ é transitivo, isto é, $A \propto B$ e $B \propto C$ implica $A \propto C$, onde A, B e C são problemas de decisão.

   Resposta. Uma vez que $A \propto B$ e $B \propto C$, existem funções (totais) f e g computáveis em tempo polinomial (relativamente ao comprimento do argumento) tais que $x \in L_A$ sse $f(x) \in L_B$ e $y \in L_B$ sse $g(y) \in L_C$, onde x e y são os argumentos de f e g, respectivalente. Então, $x \in L_A$ sse $g(f(x)) \in L_C$. Assim, a função composta $f \circ g$ mostra que existe uma redução $A \propto C$, desde que $g(f(x))$ seja computável em tempo polinomial em $|x|$.

   Sejam p_1 e p_2 os polinómios que majoram os tempos de computação de f e g, respectivamente. O tempo de computação de $g(f(x))$ é a soma dos seguintes termos

   (a) t_1 = tempo de computação de $f(x)$; por hipótese, $t_1 \leq p_1(|x|)$.

   (b) t_2 = tempo de computação de $g(y)$ onde $y = f(x)$ já foi calculado em (a); por hipótese, $t_2 \leq p_2(|y|)$. Mas é $|y| \leq p_1(|x|)$, pois não é possível em tempo $p_1(|x|)$ produzir um resultado de comprimento superior a $p_1(|x|)$ (a cada bit do resultado corresponde pelo menos um passo de computação); temos

   $$t_2 \leq p_2(|y|) \leq p_2(p_1(|x|))$$

   Assim, t_2, o tempo de computação de $g(f(x))$, é também majorado por um polinómio em $|x|$, e o tempo total de computação de $g(f(x))$, $t_1 + t_2$.

2. Mostre que

   (a) Um grafo tem um clique de tamanho k sse o grafo complementar tem um subconjunto independente de tamanho k.

   (b) Um grafo tem um subconjunto independente de tamanho k sse tem uma cobertura por vértices de tamanho $n - k$.

   Resposta. Seja $G = (V, E)$ um grafo com $n = |V|$ vértices. Se G tem um subconjunto independente de tamanho k, os restantes $n - k$ vértices formam um conjunto V' que é uma cobertura por vértices; na verdade, não pode existir qualquer ramo (a, b) com a e b fora de V' pois $V \setminus V'$ é um subconjunto independente.
   Reciprocamente, se G tem uma cobertura por vértices de tamanho $n-k$, os restantes $n-(n-k) = k$ vértices formam um conjunto independente, uma vez que, por definição de cobertura por vértices, não pode existir qualquer ramo entre esses k vértices.

(c) Um grafo tem uma cobertura por vértices de tamanho k sse o grafo complementar tem um clique de tamanho $n-k$.

3. Mostre que

   (a) Clique $\propto$ IS

   (b) IS $\propto$ VC

   Resposta. Usamos o resultado de 2.(b). A redução polinomial é

$$\begin{array}{ccc} \text{IS} & \propto & \text{VC} \\ (G,k) & \rightarrow_f & (G, n-k) \end{array}$$

   Verifiquemos que se trata de uma redução polinomial

   – Pela alínea 2.(b) $(G,k) \in L_{\text{IS}}$ sse $(G, n-k) \in L_{\text{VC}}$.
   – O cáculo de $f(G,k) = (G, n-k)$ envolve apenas uma subtracção, podendo obviamente ser efectuado em tempo polinomial.

   (c) VC $\propto$ Clique

   (d) IS $\propto$ Clique

   Resposta. Da alínea (b) é IS $\propto$ VC e da alínea (c) é VC $\propto$ Clique. Por transitividade (problema 1) vem IS $\propto$ Clique.

   (e) VC $\propto$ IS

   (f) Clique $\propto$ VC

   Sugestão. Use o problema anterior e note que, usando a transitividade de $\propto$, as 3 últimas reduções resultam das 3 primeiras.

4. Mostre que as funções correspondentes às reduções que definiu nas alíneas 3a, 3b e 3c são sobrejectivas.

   Nota. Na realidade, as funções são também injectivas e, portanto, bijectivas o que é raro acontecer; os problemas clique, VC e IS são essencialmente idênticos.

   Resposta. (resposta correspondente a 3(b)) Seja (G', k') uma instância qualquer de f (com $0 \leq k' \leq n$, onde n é o número de vértices de G'). Existe um (G,k) tal que $f(G,k) = (G', k')$, nomeadamente $G = G'$ e $k = n - k'$, pois $n - k = n - (n - k') = k'$. Assim, qualquer instância de VC é imagem de uma instância de IS.

   Provamos agora, embora não fosse pedido, que f é também injectiva, sendo pois bijectiva. Seja $(G,k) \neq (G_1, k_1)$; temos que provar que $f(G,k) \neq f(G_1,k_1)$. Se $(G,k) \neq (G_1,k_1)$

   – ou $G \neq G_1$ e nesse caso, $f(G,k) = (G, n-k) \neq (G_1, n-k_1) = f(G_1,k_1)$ (pelo menos os grafos são diferentes)
   – ou $k \neq k_1$ e nesse caso, $f(G,k) = (G, n-k) \neq (G_1, n-k_1) = f(G_1,k_1)$ (pelo menos $n - k \neq n - k_1$).