Complexidade 2007: folha prática nº 1

Fundamentos: palavras e seus comprimentos, bijecções. . .

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

É necessário ter presente os seguintes conceitos: alfabeto, linguagem, codificações em palavras de um alfabeto. Se nada se disser em contrário, o alfabeto é $\{0, 1\}$*. Sugere-se começar por resolver os exercícios marcador com "•".*

Exercícios

1. Em Matemática algumas expressões textuais, embora "roubadas" à linguagem comum, têm um significado exacto. Assim, sendo $n \in \mathbb{N}$ e $P(n)$ uma propriedade,

   – "$P(n)$ verifica-se para quase todos os valores de n" quer dizer: $P(n)$ verifica-se todos os valores de n com excepção de um número finito (que pode ser 0).
   – "$P(n)$ verifica-se para n suficientemente grande" quer dizer: $\exists n_0 \forall n \geq n_0,\ P(n)$.

   Mostre que as afirmações "$P(n)$ verifica-se para quase todos os valores de n" e "$P(n)$ verifica-se para n suficientemente grande" são equivalentes.

2. • Considere um inteiro x positivo escrito em binário. Quantos bits tem essa representação? A sua resposta deve ser uma função $l(x)$. Justifique. Exemplo: $x = 9$, $x_2 = \texttt{1001}$, $l(x) = 4$. Deve memorizar este resultado.

3. • Quantas palavras da linguagem $\{0, 1\}^\star$ com comprimento n existem? E de comprimento não superior a n? Justifique. Quantos inteiros com representação em binário de comprimento n existem? E de comprimento não superior a n? Justifique. Como justifica o facto de as respostas para "palavras" e para "inteiros" serem diferentes?

4. Designemos por "ficheiro" uma sequência de bits (se preferir, substitua no enunciado "bits" por "bytes"). Mostre que, qualquer que seja o programa compressor (sem perdas, como `gzip` ou `zip`) é impossível comprimir todos os ficheiros de um qualquer comprimento dado n. Mais precisamente, mostre que

   $$\forall n \in \mathbb{N}^+, \exists \texttt{x} :\ (|\texttt{x}| = n) \wedge (|\texttt{x.zip}| \geq n)$$

   onde `x` e `x.zip` designam respectivamente o ficheiro original e o ficheiro "comprimido". Por outras palavras, para todo o inteiro positivo n há pelo menos um ficheiro de n bits incompressível.
   Sugestão. Por redução ao absurdo: suponha que existe um n tal que todos os ficheiros de comprimento n são transformados em ficheiros de comprimento $< n$ e utilize os resultados do problema 3.
   Nota. Para $n > 10$ menos de $2^n/1024$ dos 2^n ficheiros de comprimento n podem ser comprimidos de mais de 10 bits (isto é, $|\texttt{x.zip}| < |\texttt{x}| - 10$)! Mais geralmente, para $n > m$ menos de $2^n/2^m$ dos 2^n ficheiros de comprimento n podem ser comprimidos de pelo menos $m + 1$ bits. Por outras palavras, seja qual for o programa de compressão que usemos, quase todos os ficheiros são incompressíveis!

5. Considere a seguinte bijecção $f :\ \mathbb{N} \to \{0, 1\}^\star$

```
N:        0   1   2   3   4   5   6   7  ...
{0,1}*    e   0   1  00  01  10  11  000 ...
```

   Diga como determinar eficientemente e de forma simples o inteiro $n(x)$ correspondente a uma palavra x; por exemplo a `11` corresponde o inteiro 6. Justifique.

6. Considere a seguinte bijecção $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$, por exemplo $f(1,3) = 13$.

	0	1	2	3	4
0	0	2	5	9	14
1	1	4	8	13	–
2	3	7	12	–	–
3	6	11	–	–	–
4	10	–	–	–	–

(a) • Determine uma forma explícita da função f.

(b) Seja $f(a,b) = c$. Explique como determinar $f^{-1}(c) = \langle a,b \rangle$.

(c) • Explique como, a partir da função f, pode construir uma bijecção $g : \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$. Generalize para bijecções $g : \mathbb{N}^4 \to \mathbb{N}$, etc.

(d) Como consequência da bijecção apresentada mostre que existe uma função injectiva de $\mathbb{Q}_0^+$ em $\mathbb{N}$. Dizemos que 2 conjuntos (possivelmente infinitos) têm a mesma cardinalidade ("o mesmo número de elementos") se existir uma bijecção entre eles. Mostre que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}_0^+$ têm a mesma cardinalidade.
Sugestão. A cada $n \in \mathbb{N}$ faça corresponder o n-ésimo par $\langle a,b \rangle \in \mathbb{N}^2$ da bijecção apresentada tal que $\frac{a}{b}$ seja a representação de um racional não negativo na forma normal. Mostre que existe também uma bijecção entre Q e Q_0^+.

7. • Numa sala estão $n \geq 1$ pessoas e uma delas é um "presidente", isto é, uma pessoa que todas as outras (da sala) conhecem mas que não conhece ninguém (na sala).

(a) Mostre que há no máximo um presidente.

(b) Uma pessoa externa à reunião – digamos um marciano – chega à sala e quer saber quem é o presidente. Só pode fazer perguntas do tipo: depois de escolher 2 pessoas, A e B, pergunta a A se conhece B. A resposta é SIM ou NÃO. Procure um algoritmo que que permita à pessoa externa determinar (em qualquer caso) quem é o "presidente" efectuando um número de perguntas tão pequeno quanto possível e não superior a n. Qual é esse número?

8. Considere a seguinte função de domínio $\mathbb{N}^+$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 1 \\ f(n/2) & \text{se } n \text{ é par} \\ f(3n+1) & \text{se } n \text{ é ímpar} \geq 3 \end{cases}$$

(a) Mostre que $f(n)$ está definido (e tem valor 1) para os seguintes valores de n: 1, 2, 8, 5, 7.

(b) Mostre que $f(n)$ está definido (e tem valor 1) para todos os valores de $n \in \mathbb{N}^+$.
Nota. Actualmente ninguém sabe responder a esta pergunta. Se conseguir responder, ganhará fama em todo o mundo.