Complexidade 2007: folha prática nº 3

Solução de recorrências I

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

Para resolver os exercícios desta folha é necessário conhecer as técnicas estudadas de resolução de recorrências, em especial: o método "tabelar, suspeitar, demonstrar", ométodo dasdiferenças e o método da equação característica.

Exercícios

1. • Resolva a seguinte recorrência utilizando o método "tabelar, suspeitar, demonstrar".

$$\begin{cases} t_0 = 1 \\ t_n = t_{n-1} + 2(n-1) + 3 & \text{para } n \geq 1 \end{cases}$$

2. Resolva a recorrência do problema 1 utilizando o método da equação característica.

3. • Resolva a recorrência do problema 1 utilizando o método das diferenças.

4. Resolva as seguintes recorrências, usando um qualquer método de resolução apropriado.

   (a) (definida apenas para valores do argumento que sejam potências inteiras de 2)

$$\begin{cases} f(1) = 0 \\ f(2n) = 2f(n) + 2n \end{cases}$$

   (b)

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2f(n) - n + 1 \end{cases}$$

5. Como sabe, a sequência de Fibonacci

$$0,\ 1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21, \cdots$$

   pode ser definida pela seguinte recorrência

$$\begin{cases} f_0 = 0 \\ f_1 = 1 \\ f_n = f_{n-1} + f_{n-2} & \text{para } n \geq 2 \end{cases}$$

   (a) • Utilize o método da equação característica para resolver a recorrência.

   (b) Mostre que, quaisquer que sejam os valores iniciais f_0 e f_1, existe $\lim_{n\to\infty} \frac{f_n}{f_{n-1}}$ e é independente dos valores iniciais; calcule esse limite (a convergência é muito rápida).

6. A seguinte função retorna o elemento de ordem n da sequência de Fibonacci (não é uma implementação particularmente eficiente mas resulta directamente da recorrência...)

```
1   int f(int n){
2     if n=0 then return 0
3     if n=1 then return 1
4     return f(n-1)+f(n-2)
5   }
```

   (a) •Considere uma chamada `f(n)`. Escreva uma recorrência que caracterize o número $s(n)$ de somas efectuadas (linha 4 do algoritmo).

   (b) Resolva essa recorrência.

7. Considere as diferenças de ordem k de uma função $f(n)$: $D^1(n) = f(n{+}1) - f(n)$ e $D^{k+1}(n) = D^k(n+1) - D^k(n)$. Mostre que um polinómio é de grau k sse $D^k(n)$ é constante.
   Sugestão. Use indução em k.