

Complexidade 2007: folha prática nº 4

Solução de recorrências II

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

Notas.

1. Para resolver os exercícios desta folha é necessário conhecer as técnicas estudadas de resolução de recorrências.
2. Resultado relativo a equações características: Se a equação geral da recorrência tem a forma

$$a_0 f_n + a_1 f_{n-1} + \cdots + a_k f_{n-k} = b_1^n p_1(n) + b_2^n p_2(n) + \cdots + b_m^n p_m(n)$$

onde os b_i são constantes e os $p_i(n)$ são polinómios em n de grau d_i , então as soluções da recorrência correspondente podem ser obtidas a partir das raízes x da equação

$$(a_0 x^k + a_1 x^{k-1} + \cdots + a_k)(x - b_1)^{d_1+1} (x - b_2)^{d_2+1} \cdots (x - b_m)^{d_m+1}$$

usando o método que foi explicado para o caso das equações homogéneas.

Exercícios

1. • Mostre que a solução da recorrência seguinte cresce mais rapidamente que qualquer polinómio.

$$\begin{cases} t(0) = 1 \\ t(n) = 2t(n-1) + 3n^4 + 7n + 1 \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1$$

Sugestão. Defina uma recorrência mais simples que caracterize uma função $t'(n)$ tal que seja sempre $t(n) \geq t'(n)$. Depois mostre que para qualquer polinómio $p(n)$ é $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t'(n)}{p(n)} = +\infty$.

2. • Resolva a seguinte recorrência pelo método da equação característica.

$$\begin{cases} t_0 = 0 \\ t_1 = 1 \\ t_2 = 2 \\ t_n = 5t_{n-1} - 8t_{n-2} + 4t_{n-3} \end{cases} \quad \text{para } n \geq 3$$

3. • Considere a recorrência

$$\begin{cases} t(0) = 1 \\ t(n) = t(n-1) + n2^n \end{cases} \quad \text{para } n \geq 1$$

- (a) Mostre da forma mais simples possível que para todo o $n \in \mathbb{N}$ é $t(n) \geq 2^n$.
- (b) Use o método da equação característica para determinar a solução da recorrência; confirme a solução para 3 valores de n .

4. A técnica genérica de desenvolvimento de algoritmos conhecida por “dividir para conquistar” pode para certos casos ser descrita pelo seguinte esquema onde se supõe que n é potência de 2

```
void resolve(v[1..n]){  
1   if n=1 return;  
2   m=n/2;  
3   divida v[] em 2 partes iguais: v[1..m] e v[m+1..n];  
4   resolve(v[1..m])  
5   resolve(v[m+1..n])  
6   combine as soluções obtidas  
}
```

em que o tempo de execução das linhas 3 e 6 é $O(n)$.

- (a) Mostre como o “mergesort” é um caso particular do esquema apresentado.
- (b) • Escreva uma recorrência que caracterize um majorante do tempo de execução de um algoritmo com o esquema apresentado.
- (c) Resolva a recorrência.