Complexidade 2007: folha prática nº 8

Reduções polinomiais, problemas completos na classe NP

FCUP/DCC

Docente: Armando Matos

Notas.

- As expressões "$A \leq_p B$" e "$A \propto B$" significam o mesmo: o problema de decisão A reduz-de polinomialmente ao problema de decisão B.
- O aluno deve conhecer a definição de redução polinomial entre problemas de decisão, "$A \propto B$"; a única diferença para a noção de redução ("muitos para um") entre problemas de decisão estudada na parte de "computabilidade e complexidade" é o facto de se exigir que a função f associada à redução polinomial seja computável em tempo polinomial (no comprimento $n = |x|$).
- A expressão "problema NP-completo" (classe NPC) significa "problema completo na classe NP". $\pi \in NPC$ (definição): $\pi \in NPC$ e $A \in$ NP para todo o $A \in NP$.
- Supõe-se que a análise da complexidade dos algoritmos é efectuada no "pior caso" ("worst case"), isto é, considera-se o maior tempo de execução de entre todos as instâncias de comprimento n.

Problemas.

1. **Neste problema definem-se 3 problemas de decisão, digamos A, B e C, e pretende-se mostrar que existem reduções polinomiais $A \propto B$, $B \propto C$, $C \propto A$, $B \propto A$, $C \propto B$ e $A \propto C$. A transitividade de "$\propto$" permite reduzir de 6 para 3 o número de reduções polinomiais a efectuar.**

   Considere os seguintes problemas de decisão:

   HC (ciclo hamiltoniano):
   INSTÂNCIA: Grafo não dirigido G.
   PERGUNTA: Existe um ciclo hamiltoniano no grafo G?

   HP (caminho hamiltoniano):
   INSTÂNCIA: Grafo não dirigido G.
   PERGUNTA: Existe um caminho hamiltoniano no grafo G?

   HP* (caminho hamiltoniano com extremos especificados):
   INSTÂNCIA: $\langle G, x, y\rangle$ em que G é um grafo não dirigido, x e y são vértices distintos de G.
   PERGUNTA: Existe um caminho hamiltoniano no grafo G que começa em x a acaba em y?

   (a) Indique um grafo não dirigido G e dois dos seus vértices x e y tais que: a resposta à instância G de HP seja SIM, a resposta à instância G de HC seja NÃO e a resposta à instância $\langle G, x, y\rangle$ de HP* seja NÃO.

   (b) Pretende-se mostrar que dois quaisquer dos 3 problemas de decisão referidos se reduzem polinomialmente entre si (o primeiro ao segundo e o segundo ao primeiro). Mostre que para para esse fim, e supondo-se que a redução polinomial é transitiva, basta mostrar que HP* $\propto$ HP, HP $\propto$ HC e HC $\propto$ HP*; assim se poupa a demonstração de outras 3 reduções (Quais? Porquê?).

   (c) Mostre que HP* $\propto$ HP.

   (d) Mostre que HP $\propto$ HC.

   (e) Mostre que HC $\propto$ HP*.

2. **Propriedades de “$\propto$”**

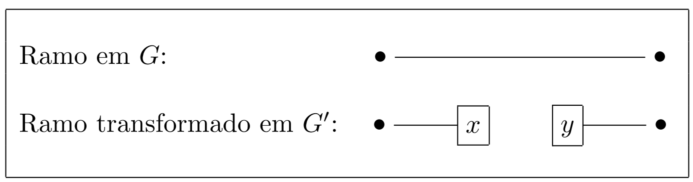
   Mostre que a relação binária de redução polinomial entre problemas de decisão é reflexiva e transitiva mas não anti-simétrica.

3. **Reduções polinomiais erradas!**

   As seguintes ideias de demonstração de reduções polinomiais estão erradas. Explique porquê.

   (a) Para mostrar que HC $\propto$ HP basta considerar a função identidade, isto é, o grafo é transformado nele próprio. Na realidade, se G tem um ciclo hamiltoniano tem também um caminho hamiltoniano: basta “cortar” um dos ramos do ciclo.

   (b) Para mostrar que HC $\propto$ HP* basta considerar a função $f:\ G \to \langle G', x, y\rangle$ em que G' é idêntico a G se G não tem ciclo hamiltoniano (sendo neste caso x e y dois vértices arbitrários de G) e difere de G pelo facto de um dos ramos por onde passa um ciclo hamiltoniano de G ser “partido” da forma indicada:



   onde x e y são vértices de G' mas não de G. Na realidade é fácil ver-se que se G tem um ciclo hamiltoniano que passa pelo ramo indicado, G' tem um caminho hamiltoniano que começa em x e acaba em y e reciprocamente que, se G' tem um caminho hamiltoniano que começa em x e acaba em y, então G tem um ciclo hamiltoniano.

4. **O que se conclui de $A \propto B$? E o que se conclui de $A \propto B$?**

   Sejam A e B problemas de decisão pertencentes à classe NP. Sabe-se (duas alternativas) que: (i) A é NP-completo, (ii) existe um algoritmo polinomial para a solução de A ou, o que é o mesmo, para a questão “$x \in L_A$?” em que L_A é a linguagem associada a A.

   (a) Mostra-se que $A \propto B$; em cada uma das duas alternativas indicadas o que se pode concluir sobre a complexidade do problema B?

   (b) Mostra-se que $B \propto A$; em cada uma das duas alternativas indicadas o que se pode concluir sobre a complexidade do problema B?