Indecidibilidade via redução

Armando Matos, 2007

A cada problema de decisão π está associada a linguagem $L_\pi = \{x : \text{resposta a } x \text{ em } \pi \text{ é sim}\}$.

Às classes de decidibilidade de problemas dec, s-dec, co-s-dec correspondem respectivamente as classes de linguagens rec, r.e., co-r.e.

A linguagens podem enquadrar-se em 4 classes disjuntas: rec, r.e. mas não rec, co-r.e. mas não rec, nem r.e. nem co-r.e. (em termos de problemas: dec, s-dec mas não dec, co-s-dec mas não dec, nem s-dec nem co-s-dec).

Resultado fundamental (demonstrado nas aulas): PAP não é decidível mas é s-dec. Equivalente: $L_{\text{PAP}} \notin \text{rec}$ mas $L_{\text{PAP}} \in \text{r.e.}$ Pelo Teorema de Post: $L_{\text{PAP}} \notin \text{co-r.e.}$

Suponhamos que se mostrou para um problema de decisão π que $\text{PAP} \leq \pi$. Que se pode concluir?

1. Se π fosse dec, PAP era dec; logo π não é dec.
2. Se π fosse s-dec, PAP era s-dec; mas PAP é s-dec, nada se concluindo.
3. Se π fosse co-s-dec, PAP era co-s-dec; logo π não é co-s-dec.

Resultados análogos com linguagens: $L_\pi \in \text{rec} \Rightarrow L_{\text{PAP}} \in \text{rec}$, logo $L_\pi \notin \text{rec}$ e analogamente para os casos 2. e 3. Repetindo:

1. Como mostrar que π não é dec? Com uma redução $\text{PAP} \leq \pi$.
2. Como mostrar que π não é co-s-dec? Com uma redução $\text{PAP} \leq \pi$, ver 3. acima.
3. Como mostrar que π não é s-dec? Com uma redução $\text{PAP} \leq \bar{\pi}$; na verdade, se π fosse s-dec, $\bar{\pi}$ era co-s-dec, logo, pela redução, PAP seria co-s-dec, o que é falso.
4. Como mostrar que π não é nem s-dec nem co-s-dec? Com reduções $\text{PAP} \leq \bar{\pi}$ e $\text{PAP} \leq \pi$ (consequência de 2. e 3.)

É claro que (definição de “redução”) para se mostrar que $A \leq B$ tem que se

- especificar a correspondente função de transformação f ,
- mostrar que $i \in L_A \Rightarrow f(i) \in L_B$,
- mostrar que $f(i) \in L_B \Rightarrow i \in L_A$.

É fundamental que o aluno conheça e compreenda os conceitos fundamentais como classes de linguagens, noção de redução, teoremas estudados, etc.