Notas.

1. Perguntas

Nota importante: Escreva V ou F dentro do quadrado respectivo. Cada quadrado: 100% se resposta certa, 0% se não responde, -100% se resposta errada.

- A solução da recorrência $f(0) = 0$, $f(n+1) = f(n) + n$ é um polinómio de grau 3 F
- $2n^2$ é de ordem $O(n^3)$ V
- Sejam as funções f e g de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$; se $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n)$ existe e é finito (nulo ou não!), então $f(n)$ é de ordem $\Omega(g(n))$ F
- Seja f definida por $f(n) = n$ se n é par e $f(n) = 0$, se n é ímpar. $f(n)$ é de ordem $O(\sqrt{n})$ F
- $O(3n^2) = O(n^3 + 2n + 1)$ F
- Seja $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ definido pela recorrência $f(1) = 1$, $f(n+1) = 2f(n) + \sqrt{n}$. A função $f(n)$ cresce mais rapidamente que qualquer polinómio em n V
- Se $f(n) \in \Theta(n^2)$ e $g(n) \in \Theta(n^2)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n)$ existe e é finito F
- Se $f(n) \in O(n^2)$, então $f(n) \in \Theta(n^2)$ F
- Se a equação característica correspondente à equação geral (homogénea) de uma recorrência é $(x-2)^2(x-3)$, as soluções possíveis da equação geral são exactamente as da forma $\alpha 2^n + \beta n 2^n + \gamma 3^n$, onde α , β e γ são coeficientes reais arbitrários V
- Sejam as funções f e g de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$; se $f(n)$ é de ordem $\Omega(n)$, então $\lim_{n \rightarrow \infty} f(n)/g(n)$ existe e é finito F

2. Mostre que $\log n$ é de ordem $O(n)$ mas que n não é de ordem $O(\log n)$. Pode usar os seguintes factos: $\log n$ é uma sucessão crescente e ilimitada e $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n/n = 0$.

Resp.

→ ‘ $\log n$ NÃO É DE ORDEM $O(n)$ ’: POR DEFINIÇÃO DE LIMITE, TEMOS SUCESSIVAMENTE

$$\begin{aligned} & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : |\log n/n| < \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \log n/n < \varepsilon \\ \Rightarrow & \forall \varepsilon > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \log n < \varepsilon n \\ \Rightarrow & \exists n_0, \forall n \geq n_0 : \log n < n \end{aligned}$$

ONDE A ÚLTIMA AFIRMAÇÃO RESULTA DE SE FIXAR $\varepsilon = 1$. PARA CHEGARMOS AO RESULTADO PRETENDIDO, BASTA TOMAR $k = 1$ E O CORRESPONDENTE VALOR DE n_0 NA DEFINIÇÃO DE “ $\log n$ É DE ORDEM n ”.

→ ‘ n NÃO É DE ORDEM $O(\log n)$ ’: SE ISSO FOSSE VERDADE, $\exists k > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0 : n \leq k \log n$, OU SEJA, (PARA $n \geq 1$), $\exists k > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0 : \log n/n \geq k$, O QUE É CONTRADITÓRIO COM O FACTO DE $\lim_{n \rightarrow \infty} \log n/n = 0$ (VERIFICAR!).

3. Resolva a seguinte recorrência usando o método que entender, mas de forma rigorosa.
Sugestão. Pode ter interesse tabelar também 2^n .

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2f(n) - n + 1 \end{cases}$$

Resp.

	n	2^n	$f(n)$	
	0	1	1	
	1	2	3	
TABELA:	2	4	6	
	3	8	11	
	4	16	20	

SUSPEITA:	$f(n) = n + 2^n$
-----------	------------------

DEMONSTRAÇÃO DE QUE A SOLUÇÃO DA RECORRÊNCIA É $f(n) = n + \log n$ (POR INDUÇÃO EM n).
 CASO $n = 0$: $f(1) = 1$ DA RECORRÊNCIA E $0 + 2^0 = 1 \checkmark$
 $f(n) = n + 2^n \Rightarrow f(n+1) = (n+1) + 2^{n+1}$:

$$\begin{aligned} f(n+1) &= 2f(n) - n + 1 && \text{(DA RECORRÊNCIA)} \\ &= 2(n + 2^n) - n + 1 && \text{(HIPÓTESE INDUTIVA)} \\ &= (n+1) + 2 \times 2^n \\ &= (n+1) + 2^{n+1} \end{aligned}$$

COMO SE PRETENDIA.

4. Seja $h(n)$ definida pela recorrência: $h(0) = 1$, $h(n+1) = 3h(n) + \sqrt{n}$. Mostre que $h(n)$ é de ordem $\Omega(2^n)$. Se neste exercício tiver que resolver uma recorrência, apresente apenas a recorrência e a sua solução. **Sugestão.** Transforme a recorrência noutra mais simples que define uma função $f(n) \leq h(n)$ (para todo o $n \in \mathbb{N}$) tal que $f(n)$ também é de ordem $\Omega(2^n)$.

Resp. SEJA $f(n)$ DEFINIDO POR: $f(0) = 1$, $f(n+1) = 3f(n)$. POR INSPECÇÃO VÊ-SE QUE $f(n) = 3^n$. VAMOS MOSTRAR QUE, PARA $n \in \mathbb{N}$, É $f(n) \leq h(n)$; USAMOS INDUÇÃO EM n : $f(0) = 1 \leq g(0) = 1$ E $h(n+1) = 3h(n) + \sqrt{n} \leq 3f(n) + \sqrt{n} \leq 3f(n) = f(n+1)$. TEMOS ENTÃO:

$$\forall n : 2^n \leq f(n) = 3^n \leq h(n)$$

OU SEJA $\forall n : h(n) \geq 2^n$. BASTA ENTÃO TOMAR NA DEFINIÇÃO DE “ $h(n)$ É DE ORDEM $\Omega(2^n)$ ” OS VALORES $k = 1$ E $n_0 = 0$.

5. Considere as funções f e g de $\mathbb{N}$ em $\mathbb{R}^+$. Sabe-se que $g(n)$ é de ordem $O(f(n))$ mas que $f(n)$ não é de ordem $O(g(n))$. Pode concluir-se que $\forall k > 0, \exists n \in \mathbb{N} : f(n)/g(n) > k$? sim.
 Justifique:

Resp. TEMOS SUCESSIVAMENTE

$$\begin{aligned} f(n) \text{ NÃO É DE ORDEM } O(g(n)) & \tag{1} \\ \Rightarrow \neg(\exists k > 0, \exists n_0, \forall n \geq n_0 : f(n) \leq kg(n)) & \tag{2} \\ \Rightarrow \forall k > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0 : f(n) > kg(n) & \tag{3} \\ \Rightarrow \forall k > 0, \forall n_0, \exists n \geq n_0 : f(n)/g(n) > k & \tag{4} \\ \Rightarrow \forall k > 0, \exists n : f(n)/g(n) > k & \tag{5} \end{aligned}$$

A ÚLTIMA IMPLICAÇÃO RESULTA DE FIXARMOS EM (4) UM VALOR DE n_0 (POR EXEMPLO, $n_0 = 1$), GARANTINDO-SE ASSIM A EXISTÊNCIA DE UM n TAL QUE $f(n)/g(n) > k$.