.

Resolução de um problema proposto sobre indecidibilidade

Considere o seguinte problema (π):
DADO: inteiro $i \in \mathbb{N}$
PERGUNTA: $\{i\}(x) \downarrow$ <u>sse</u> x é primo?
Mostre que L_π não pertence à classe r.e. (o que implica, em particular, que não pertence à classe rec.).

RESOLUÇÃO.
Vamos definir uma redução

$$\begin{array}{rcl} \text{PAP} & \leq & \overline{\pi} \\ i & \rightarrow & j = f(i) \end{array}$$

Deverá ser:

$$(\star) \qquad \boxed{\{i\}(i)\downarrow} \text{ sse } \boxed{\text{não é verdade que } \{j\}(x)\downarrow \text{ sse x é primo}}$$

Redução: dado i, define-se a máquina de índice j que, com dados x, faz o seguinte:

1. Testa se x é primo
2. Se sim pára.
3. Se não:
   (a) apaga a fita (x)
   (b) escreve i na fita
   (c) simula $\{i\}(i)$

Observação: o último passo pode não terminar.
Se $\{i\}(i)\downarrow \Rightarrow$
a computação $\{j\}(x)$ pára para todo o $x \Rightarrow$
não é verdade que $\{j\}(x)\downarrow$ sse x é primo.
Por outro lado, se $\boxed{\text{não é verdade que } \{j\}(x)\downarrow \text{ sse x é primo}}$, o único modo de isso poder acontecer é a computação $\{i\}(i)$ não parar.
Logo, verificam-se as 2 direcções de ($\star$).
Se $L_{\overline{\pi}}$ pertencesse à classe co-r.e., então PAP também pertencia à classe co-r.e. Mas isso não é verdade, pois sabe-se que L_{PAP} é r.e. mas não recursiva (e, pelo Teorema de Post, L_{PAP} não é co-r.e.).
Logo $L_{\overline{\pi}}$ não pertence à classe co-r.e.,
Logo L_π não pertence à classe r.e..

Nota. uma redução PAP$\leq$ π permititia concluir que L_π também não pertence à classe co-r.e. (<u>exercício</u>).

Nota. a função f que define uma redução deve ser computável total. Por exemplo, a construção seguinte (com dados i) não é computável total, (nem sequer computável parcial) não havendo nenhuma M.T. que a implemente.
Dado i,

1. Testa se x é primo
2. Se sim pára.
3. Se não:
   (a) apaga a fita (x)
   (b) escreve i na fita
   (c) simula $\{i\}(i)$
4. Se {i}(i) não pára, o resultado é 1 e pára
5. Se {i}(i) pára, entra num "ciclo infinito"

O problema é o passo 4) (insolubilidade do problema PAP).

Nota. de um modo geral, a informação de que dispõe sobre a decidibilidade de problemas de decisão é (apenas) a seguinte: PAP é semi-decidível mas não decidível.