

1. Perguntas...

- “Toda a função total computável (recursiva total) é PR”  
Verdadeiro ou falso?     F      
Justifique.

**Resposta.**

*Foi mostrado na disciplina que qualquer modelo de computação que caracterize apenas funções recursivas totais – como o modelo das funções PR – é incompleto no sentido em que existem funções recursivas totais não caracterizáveis nesse modelo.*

*A função de Ackermann é um exemplo de uma função recursiva total (=computável e total) mas não pertencente à classe PR.*

- Qualquer função  $f(x)$  implementável em linguagem WHILE é recursiva parcial mas não primitiva recursiva     F
- Do Teorema de Post podemos concluir que a linguagem complementar de qualquer linguagem recursiva é R.E.     V
- Se um problema de decisão é decidível, o seu complementar também é decidível.   V
- O problema de decisão: dado  $i \in \mathbb{N}$ ,  $\boxed{\forall x, \{i\}(x) \uparrow}$ ? é indecidível mas semi-decidível.  
    F

2. Mostre que o predicado “ $x > y$ ” é PR, isto é, que a função  $f : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > y \\ 0 & \text{se } x \leq y \end{cases}$$

pertence à classe PR. **Sugestão.** Implemente  $f(x, y)$  com um programa FOR.

**Resposta.**

*O seguinte programa FOR implementa a função  $f$  o que mostra que  $f$  pertence à classe PR.*

```
for y {dec x}           // x-y => x  (0 se x <= y)
for x {dec x0; inc x0} // 1  => x0   se x>y
```

*Nota. Usamos os registos x e y em vez de x1 x2.*

3. Considere o problema CONV2 (converge para 2 valores...):

INSTÂNCIA:  $i \in \mathbb{N}$

PERGUNTA: A função  $\{i\}$  está definida para 2 ou mais valores de  $x$ ? (em linguagem matemática:  $\exists x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' : (\{i\}(x) \downarrow) \wedge (\{i\}(x') \downarrow)$ ?)

- (a) Mostre que CONV2 é indecidível sem utilizar o Teorema de Rice.

**Sugestão.** Efectue uma redução envolvendo os problemas PAP e CONV2 e tire conclusões.

**Resposta.**

Vamos efectuar uma redução  $PAP \leq_{\text{CONV2}}$  o que mostra que CONV2 não é decidível. Pretende-se pois encontrar uma função computável total  $j = f(x)$  tal que

$$\begin{array}{lcl} PAP & \leq & CONV2 \\ i \in \mathbb{N} & \rightarrow & j = f(i) \in \mathbb{N} \\ \{i\}(i) \downarrow & \boxed{\text{sse}} & \exists x, x' \in \mathbb{N}, x \neq x' : (\{i\}(x) \downarrow) \wedge (\{i\}(x') \downarrow) \end{array}$$

A MT descrita por  $j = f(i)$  vai convergir para todos os valores ou para nenhum:

Máquina de Turing descrita por  $j$ :

- 1) Apaga a fita
- 2) Escreve  $i$  na fita
- 3) Executa a MT descrita por  $i$

Claramente, se  $\{i\}(i) \downarrow$ ,  $\{j\}(x)$  converge para todo o  $x$  e, portanto para “pelo menos 2 valores de  $x$ ”; reciprocamente, se  $\{j\}(x)$  converge para pelo menos 2 valores de  $x$  (converge então para todos) é  $\{i\}(i) \downarrow$ .

(b) Usando o Teorema de Rice, mostre que CONV2 é um problema indecidível.

**Resposta.**

A classe das funções  $\{i\}$  com a propriedade CONV2 não é trivial: na verdade existem funções recursivas que estão definidas para  $\geq 2$  valores (como por exemplo  $0(x)$ , implementável por uma MT que escreve 0 na fita e pára) e existem funções recursivas que só estão definidas para 0 ou 1 valores (como por exemplo  $\uparrow(x)$ , implementável por uma MT que efectua sempre uma computação infinita).

Resulta do Teorema de Rice que é indecidível, dado  $i$ , determinar se a função  $\{i\}$  está definida para 2 ou mais valores.

(c) A linguagem  $L_{\text{CONV2}}$  (em cada caso escreva S ou N)

- N é recursiva
- S é recursivamente enumerável
- N é complementar de uma linguagem recursivamente enumerável
- N não pertence a nenhuma das classes anteriores

**Exercício complementar.** Responda à seguinte variante do problema 3 (todas as alíneas): na definição de CONV2, em vez de ser “converge para pelo menos 2 valores”, é “converge exactamente para 2 valores”.