Complexidade – prova 3

Nome: **NMEC**:

Notas. - A prova tem 4 questões. - A duração da prova é 50 minutos. - É fornecida uma folha auxiliar com uma descrição dos principais problemas de decisão.

1. **Perguntas.**

   Nota importante: *Escreva* V *ou* F *dentro do quadrado respectivo. Cada quadrado: 100% se resposta certa, 0% se não responde, -100% se resposta errada.*

   — $[\pi \in P] \Rightarrow [\pi \in NP]$ V

   — Se π é completo em NP então π é decidível V

   — Se o problema π é semi-decidível então pertence à classe P .... F

   — O seguinte problema de decisão "um grafo dado tem um Clique de tamanho 5?" pertence à classe P V

   — O problema A pertence à classe NPC e o problema B à classe co-NP; se existir um algoritmo polinomial para A, então existe um algoritmo polinomial para B V

   — $A \propto B$ e $B \propto A$ implicam $A = B$ .... F

   — Existem problemas completos na classe P relativamente à redução "$\propto$" V

   — O teorema de Cook é: NP $\cap$ co-NP = P .... F

   — O problema 2COL pertence à classe P V

2. Sabe-se que 3COL é NPC. Mostre que 4COL também é NPC;
   explique apenas a redução 3COL $\propto$ 4COL.

   Resp. A função f asociada à redução $(V, E) \rightarrow^f (V', E')$ é definida como

   $$V' = V \dot{\cup} \{a\},\ E' = E \cup \{(a, x) : x \in V\}$$

   onde a é um novo ramo. A função $f(V, E)$ pode obviamente ser computada em tempo polinomial no comprimento da descrição do grafo: há apenas que juntar um novo vértice e $|V|$ novos ramos.

   $\Rightarrow$ Se (V, E) pode ser colorido com as 3 cores $\{1, 2, 3\}$ (nota: não é obrigatório usar as 3 cores), (V', E') pode ser colorido com as 4 cores $\{1, 2, 3, 4\}$: basta manter a cor dos vértices de V a atribuir a a a cor 4.

   $\Leftarrow$ Se (V', E') pode ser colorido com 4 cores, todos os vértices de V têm cores diferentes da cor de a (pois estão ligados a a), pelo que o grafo original (V, E) pode ser colorido com 3 cores.

$\rightarrow$

3. *Em que classe estão?* Indique da forma mais exacta possível a classe de complexidade a que pertence cada um dos seguintes problemas (por exemplo, se um problema está na classe P, a resposta "NP" não é considerada correcta, uma vez que a resposta não é dada "da forma mais exacta possível").
As classes de complexidade permitidas são: P, NP, NPC, co-NP, co-NPC e N (nenhuma das classes anteriores).

- 2COL .... `P`
- 3SAT .... `NPC`
- TAUT .... `co-NPC`
- EME .... `N`
- Clique .... `NPC`
- 2DM .... `P`

4. Considere o problema seguinte TSP
Instância: Inteiro D (distância máxima), inteiro n (número de cidades) e uma matriz d de inteiros positivos com n linhas e n colunas, sendo $d[i,j]$ a distância entre a cidade i e a cidade j.
Pergunta: Existe um ciclo através das cidades tal que cada cidade é visitada uma e uma só vez e de modo que a distância total percorrida não exceda D?
Mostre que TSP é NPC. Qual é a redução que vai efectuar? HC $\propto$ TSP
Descreva essa redução e complete a prova de que TSP é NPC.
Resp. A transformação a efectuar é da forma

$$\begin{array}{ccc} \texttt{HC} & \propto & \texttt{TSP} \\ (V,E) & \rightarrow^f & (D,n,d) \end{array}$$

A transformação é

$$\begin{array}{rcl} D & = & |V| \\ n & = & |V| \\ d[i,j] & = & \begin{cases} 1 & \texttt{se } (i,j) \in E \\ 2 & \texttt{se } (i,j) \notin E \end{cases} \end{array}$$

(em particular $d[i,i] = 2$ para $1 \leq i \leq n$)
$\Rightarrow$ Se existe um ciclo hamiltoneano $(a_1, a_2, \ldots, a_n, a_1)$ no grafo original, esse mesmo ciclo de cidades tem um comprimento total de $D = n = |V|$ pois o ciclo visita cada cidade uma só vez com distâncias 1 (pois correspondem a ramos do grafo original.
$\Leftarrow$ Suponhamos que existe um ciclo de cidades cujo comprimento não excede D; dada a construção da matriz d e o facto do ciclo ter necessariamente comprimento n, a distância nesse ciclo entre 2 cidades consecutivas é necessariamente 1 (se existisse uma sucessão $i \rightarrow j$ onde $(i,j) \notin E$, a distância total seria $\geq D{+}1$), pelo que essa mesma sucessão de índices corresponde a um ciclo (hamiltoneano) no grafo original.

Sabemos que HP $\in$ NPC, pelo que falta apenas mostrar que TSP $\in$ NP.
Dada uma palavra y e uma instância (D,n,d) de TSP, pode ser verificado em tempo polinomial que

1) y representa uma sequência $(a_1, a_2, \ldots, a_m, a_1)$ de índices, todos compreendidos entre 1 e n.
2) $m = n$
3) $d[a_1,a_2] + d[a_2,a_3] + \ldots + d[a_m,a_1] \leq D$