Teoria dos problemas completos de NP – 60m
Nome: _____ NMEC: _____

Nota. Pode responder às suas perguntas supondo que $(P \neq NP) \wedge (NP \neq \text{co-NP})$.

1. *O que é isso?*

Defina os seguintes conceitos

- (a) Problema completo em NP

Resposta

Diz-se que o problema de decisão A é completo em NP sse

- $A \in NP$
- $\forall \Pi \in NP : \Pi \leq A$

ou, por palavras, se A pertencer à classe NP e qualquer problema de NP possa ser reduzido polinomialmente a A.

- (b) Redução polinomial entre problemas de decisão

Resposta

Diz-se que o problema de decisão A se reduz ao problema de decisão B e escreve-se $A \leq B$, se existe uma função total f das instâncias x de A nas instâncias $f(x)$ de B tal que (i) $x \in L_A$ (isto é, a resposta à instância x em A é SIM) sse $f(x) \in L_B$ e, além disso, f é computável em tempo polinomial em termos de $|x|$.

2. *Simetrias...*

- (a) A redução polinomial entre problemas de decisão é simétrica, isto é, $A \leq B \implies B \leq A$? Verdadeiro ou falso? F
Justificação:

Se A pertencer à classe P e B for completo em NP, por definição de “completo” é $A \leq B$, mas não pode ser $B \leq A$ pois isso implicava que B também era completo em NP (e todos os problemas de NP teriam algoritmo de decisão polinomial, isto é $P=NP$). Assim, temos por exemplo, $2SAT \leq 3SAT$ mas não $3SAT \leq 2SAT$.

- (b) A redução polinomial entre problemas de decisão é anti-simétrica, isto é, $A \leq B$ e $B \leq A \implies A=B$? Verdadeiro ou falso? F
Justificação:

Se A e B são completos em NP é $A \leq B$ e $B \leq A$. Por exemplo, $CLIQUE \leq VC$, $VC \leq CLIQUE$ mas $CLIQUE \neq VC$.

3. *Por todos menos por um...*

Mostre que o seguinte problema de decisão, a que chamamos II, é completo em NP.

INSTÂNCIA: Grafo não dirigido G

PERGUNTA: Existe um caminho *simples* que passa por $n - 1$ vértices de G , em que n é o número de vértices de G (isto é, que passa por todos os vértices do grafo menos por um)?

(continua no verso)

Resposta

(1) Seja $G = (V, E)$ a instância de Π ; $\Pi \in \text{NP}$ pois a partir de uma palavra dada y (a possível “solução”) é fácil testar em tempo polinomial se ela consiste num caminho simples de comprimento $|V| - 1$, isto é, numa sequência de $|V| - 1$ vértices, todos distintos e tais que, se a e b são 2 vértices consecutivos da sequência, então $(a, b) \in E$.

(2) Vamos mostrar que $\text{HP} \propto \Pi$, ficando assim provado que Π é completo em NP. A transformação é a seguinte

$$f : \begin{array}{ccc} \text{HP} & \longrightarrow & \Pi \\ G & \longrightarrow & f(G) = G' \end{array}$$

onde $G = (V, E)$ é o grafo original e $G' = (V \cup \{a\}, E)$ é um grafo com os mesmos ramos e com um vértice adicional a “isolado”. Na verdade

- Se G tem um caminho hamiltoniano, esse mesmo caminho em G' passa por todos os vértices menos por a .
- Em G' nenhum caminho pode passar pelo vértice isolado a . Assim, se um caminho em G' passa por $|V| - 1$ vértices, no grafo original G esse caminho é hamiltoniano.

4. *Por metade...*
Semelhante ao problema anterior: “dado um grafo com um número par de vértices, existe um ciclo simples que passa por metade do número de vértices?”.
5. *Cabem nas malas?*
Mostre que o seguinte problema de decisão, a que chamamos MALAS, é completo em NP.
INSTÂNCIA: (C, a, k, h) : Conjunto C de m objectos, cada um com uma altura $a(i)$ ($i \in C$), k malas de altura h .
PERGUNTA: Os objectos cabem nas malas? (só é importante a altura dos objectos).
6. *Em que classe estão?* Indique da forma mais exacta possível¹ a classe de complexidade a que pertence cada um dos seguintes problemas.
As classes de complexidade permitidas são: P, NP, NPC, co-NP, co-NPC e N (nenhuma das classes anteriores). Se a resposta for “N” deve dar uma justificação sucinta.

- Um grafo dado G (inst.) tem um CLIQUE de tamanho 5 (pergunta)? ...	<input type="text" value="P"/>
- Problema de decisão TAUT (tautologia)	<input type="text" value="co-NPC"/>
- HP (caminho hamiltoniano)	<input type="text" value="NPC"/>
- 2SAT	<input type="text" value="P"/>
- 4SAT	<input type="text" value="NPC"/>
- VC	<input type="text" value="NPC"/>
- Um grafo dado G (instância) é conexo (pergunta)?	<input type="text" value="P"/>
- Determinar um CLIQUE de tamanho máximo de um grafo dado.	<input type="text" value="N"/>

Justificação: “determinar um CLIQUE” não é um problema de decisão.

¹Por exemplo, se um problema está na classe P, a resposta “NP” não é considerada correcta, uma vez que a resposta não é dada “da forma mais exacta possível”.