# Estruturas de Dados e Algoritmos

Folha de exercícios número 2

2000/2001

1. Uma função é definida pela seguinte recorrência

$$\begin{cases} f(0) = 1 \\ f(n+1) = 2f(n) + 2 \quad \text{para } n \geq 0 \end{cases}$$

   (a) Implemente um programa que liste os valores de $n$ e $f(n)$ para $n = 0,\ 1,\ \cdots,\ 100$ com o formato indicado. A implementação da função $f(n)$ deve seguir a forma da recorrência, não podendo utilizar ciclos.

```
          n                        f(n)
---------------------------------------------
          0                         1
          1                         4
          2                        10
...
```

   (b) Provavelmente ocorrerão problemas para valores de $n$ elevados. Determine a origem desses problemas *e solucione-os*. A sua solução poderá envolver

      i. A definição de um método para representar inteiros grandes.
      ii. A escrita de uma função para adicionar 2 a esses inteiros.
      iii. A escrita de uma função para multiplicar por 2 esses inteiros.
      iv. A escrita de uma função para imprimir esses inteiros.

```
Notas...
       11 999 999  +                   11 750 600  *
                2                               2
       ----------                      ----------
       12 000 001                      23 501 200

Impressão: [60,750,11] => 11750060 e não 011750060 ou 1175060
```

   (c) [Papel] Resolva a recorrência.

## Sobre a solução da recorrência

### Tentando substituir...

$$\begin{aligned}
f(n) &= 2f(n-1)+2 \\
&= 2(2f(n-2)+2)+2 \\
&= 2(2(2f(n-3)+2)+2)+2 \\
&= 2(2(2+2)+2)+2 && \text{supondo } n=3 \\
&= 2^3+(2^3+2^2+2+1)-1 \\
&= 2^3+2^4-1-1 \\
&= 2^3+2^4-2
\end{aligned}$$

### Suspeita...

$$f(n) = 2^{n+1}+2^n-2$$

### Verificando alguns valores

$$f(0) = 1 = 2^1+2^0-2 = 3-2 = 1$$

e

$$f(3) = 22 = 2^4+2^3-2 = 22$$

### Demonstrando por indução

Teorema A solução da recorrência é $f(n) = 2^{n+1}+2^n-2$.
Demonstração por indução em $n$.

1. $f(0) = 1 = 2^1+2^0-2 = 3-2 = 1$

2. Suponhamos que $f(n) = 2^{n+1}+2^n-2$. Calculemos

$$\begin{aligned}
f(n+1) &= 2f(n)+2 && \text{pela recorrência} \\
&= 2(2^{n+1}+2^n-2)+2 && \text{pela hipótese} \\
&= 2^{n+2}+2^{n+1}-4+2 \\
&= 2^{n+2}+2^{n+1}-2
\end{aligned}$$

Portanto

$$[f(n) = 2^{n+1}+2^n-2] \Rightarrow [f(n+1) = 2^{n+2}+2^{n+1}-2]$$

E fica completa a demonstração.