Estruturas de Dados e Algoritmos

Folha de exercícios número 5

2000/2001

1. Uma caixa a n dimensões (segmento de recta, rectângulo, paralelipípedo...) tem uma "forma" definida por uma sequência $(a_1, \cdots, a_n)$ de inteiros que são as suas dimensões (ao longo dos diversos eixos). Nos programas que vai implementar a forma das caixas é sempre dado pela sequência: $n, a_1, \cdots, a_n$.

   (a) São dadas duas caixas n-dimensionais

   $$(a_1, \cdots, a_n), \quad (b_1, \cdots, b_n)$$

   Pergunta-se: com uma rotação apropriada, a primeira caixa "cabe" na segunda? Por outras palavras: existe uma permutação $(p_1, \cdots, p_n)$ da sequência que corresponde à primeira caixa tal que seja $p_i \leq b_i$ para $1 \leq i \leq n$? Exemplos:

Caixa 1	Caixa 2	Resultado	Razão
$(9, 6, 7, 3)$	$(10, 8, 6, 2)$	Não	
$(6, 2, 6, 7)$	$(10, 8, 6, 3)$	Sim	$7 \leq 10$, $6 \leq 8$, $6 \leq 6$, $2 \leq 3$

   (b) Dada a forma de uma caixa, indicar de quantos modos pode ser "rodada"; mais precisamente, pergunta-se: quantas sequências distintas se podem obter por permutação dos elementos da sequência dada? Exemplos:

Caixa	Resultado
$(1, 2, 3, 4)$	24
$(6, 6, 6)$	1
$(2, 8, 2, 8)$	6

Nota Tem (pelo menos) duas maneiras distintas de resolver este problema: (i) procurando uma "fórmula" directa do valor pretendido e (ii) gerando todas as $n!$ permutações da sequência dada e contando quantas são distintas.

2. "Merge" e "mergesort"

   (a) Implemente um algoritmo que faça o "merge" de dois vectores ordenados e imprima o vector resultante bem como o número de comparações efectuadas que envolvem elementos dos vectores dados.

   Por exemplo, para os dados

   ```
   [2,7,15,18,30,40],     [5,6,8,9,12]
   ```

   resulta

   ```
   [2,5,6,7,8,9,12,15,18,30,40] - 7 comparações
   ```

   (b) Implemente um algoritmo que ordene um vector pelo método "mergesort".

3. Uma permutação dos inteiros $\{1, \cdots, n\}$ pode ser representada das seguintes formas que são ilustradas para a permutação $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}$

   - Vector das transformadas, $[3, 6, 1, 2, 5, 4]$.
   - Lista de ciclos, $(1, 3)(2, 6, 4)(5)$.

   (a) Implemente um algoritmo que transforme a primeira notação na segunda.

   (b) Implemente um algoritmo que transforme a segunda notação na primeira.

Se quiseres ter pouco trabalho, pensa antes de escreveres o programa