

Métodos de Apoio à Decisão

Algoritmo do Simplex (método do *Big M*)

João Pedro Pedroso

2024/2025

- Aulas passadas:
 - resolução gráfica de problemas lineares de otimização
 - introdução ao algoritmo do simplex

Algoritmo do simplex: descrição geral

- 1 Converter o problema à forma *standard*.
- 2 Determinar uma solução básica admissível (SBA).
- 3 Verificar se a SBA é ótima; se sim, STOP.
- 4 Se não, passar para outra SBA, adjacente à anterior mas com um melhor objetivo, utilizando operações algébricas elementares.
- 5 Começar uma nova iteração (passo 3).

Casos especiais da programação linear: quadro do simplex

- Caso de **soluções óptimas múltiplas**:
 - há uma variável não básica com coeficiente 0 na linha 0 do quadro ótimo
 - essa variável pode entrar na base (saindo outra) sem que o objectivo seja alterado
- Caso de **problemas ilimitados**:
 - num passo do algoritmo há uma variável não básica que pode ser aumentada (de zero para um valor positivo)
 - quando essa variável entra na base, não há nenhuma restrição que a limite
 - *em problemas de maximização: uma variável tem coeficiente negativo na linha 0, e coeficientes não positivos em todas as restrições*

- Algoritmo do simplex para problemas de minimização

Algoritmo do simplex para problemas de minimização

Para **minimizar**:

Método 1 Modificar o objectivo:

$$\text{minimizar } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$$

$$\longrightarrow \text{maximizar } -z = -c_1x_1 - c_2x_2 + \dots - c_nx_n$$

Método 2 Modificar o passo 3 do algoritmo:

Passo 3 Todas as variáveis não-básicas têm coeficientes ≤ 0 na linha 0?

- se sim, então a solução é óptima.
- se não: escolher a variável que tem o coeficiente mais positivo para entrar na base (heurística).

Algoritmo do simplex: método do *big M*

Quando não se consegue inferir directamente uma solução básica admissível, tem de se utilizar uma etapa inicial para a determinar.

- Modificar as restrições por forma a que todos os termos independentes sejam não negativos.

Identificar todas as restrições do tipo $=$ ou $\geq$.

- Converter desigualdades para a forma standard.
- Adicionar uma *variável artificial* a_i por cada restrição i que inicialmente era $\geq$ ou $=$.
- Seja M um valor positivo muito elevado
 - Minimização: novo objectivo $z' = z + Ma_i$
 - Maximização: novo objectivo $z' = z - Ma_i$
- Resolver o problema transformado pelo método do simplex.

- Nada nos garante que a solução ótima deste problema seja a solução ótima do problema original. . .
- Mas caso na solução ótima todas as variáveis a_i sejam nulas, a solução é válida (e ótima) para o problema original
- se alguma variável a_i for diferente de zero no quadro ótimo, o problema original é **impossível**

Exemplo

Uma companhia fabrica uma bebida vitaminada com base em sumo de laranja e num extracto artificial. Cada centilitro do extracto artificial contém 0.5 cl de melaço e 1 mg de vitamina C. Cada centilitro de sumo contém 0.25 cl de melaço e 3 mg de vitamina C. O extracto custa 2 cêntimos/cl, e o sumo 3 cêntimos/cl.

O departamento de marketing decidiu que cada lata de 10 cl deverá ter no máximo 4 cl de melaço e pelo menos 20 mg de vitamina C.

Determinar como é que a empresa poderá satisfazer os requisitos do departamento de marketing ao custo mínimo.

Exemplo

Uma companhia fabrica uma bebida vitaminada com base em sumo de laranja e num extracto artificial. Cada centilitro do extracto artificial contém 0.5 cl de melaço e 1 mg de vitamina C. Cada centilitro de sumo contém 0.25 cl de melaço e 3 mg de vitamina C. O extracto custa 2 cêntimos/cl, e o sumo 3 cêntimos/cl.

O departamento de marketing decidiu que cada lata de 10 cl deverá ter no máximo 4 cl de melaço e pelo menos 20 mg de vitamina C.

Determinar como é que a empresa poderá satisfazer os requisitos do departamento de marketing ao custo mínimo.

$$\begin{array}{ll} \text{minimizar } z = & 2x_1 + 3x_2 \\ \text{sujeito a} & 1/2x_1 + 1/4x_2 \leq 4 \\ & x_1 + 3x_2 \geq 20 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

Problema transformado

- Forma standard:

$$\begin{array}{rccccccc} z & -2x_1 & -3x_2 & & & & = 0 \\ & 1/2x_1 & +1/4x_2 & +s_1 & & & = 4 \\ & x_1 & +3x_2 & & -e_2 & & = 20 \\ & x_1 & +x_2 & & & & = 10 \end{array}$$

- Introdução das variáveis artificiais (linhas 2 e 3); objectivo fica minimizar $z = 2x_1 + 3x_2 + Ma_2 + Ma_3$:

$$\begin{array}{rccccccccc} z & -2x_1 & -3x_2 & & & -Ma_2 & -Ma_3 & & = 0 \\ & 1/2x_1 & +1/4x_2 & +s_1 & & & & & = 4 \\ & x_1 & +3x_2 & & -e_2 & +a_2 & & & = 20 \\ & x_1 & +x_2 & & & & +a_3 & & = 10 \end{array}$$

Para determinarmos a **solução básica admissível** inicial:

- Variáveis a_2 e a_3 são básicas
- Temos que as colocar com coeficiente zero na linha (0):
 - somar à linha (0) $M \times$ a linha(2)
 - somar à linha (0) $M \times$ a linha(3)

Quadros do simplex

Queremos que a_2 e a_3 estejam na solução básica admissível (por isso é que as introduzimos!); temos que eliminar os seus coeficientes da linha 0:

	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	VB
<i>linha0</i>	1	$2M - 2$	$4M - 3$	0	$-M$	0	0	$30M$	$z = 30M$
<i>linha1</i>	0	$1/2$	$1/4$	1	0	0	0	4	$s_1 = 4$
<i>linha2</i>	0	1	3	0	-1	1	0	20	$a_2 = 20$
<i>linha3</i>	0	1	1	0	0	0	1	10	$a_3 = 10$

x_2 entra na base, saindo a_2 :

	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	VB
<i>linha0</i>	1	$\frac{2M-3}{3}$	0	0	$\frac{M-3}{3}$	$\frac{3-4M}{3}$	0	$\frac{60+10M}{3}$	$z = \frac{60+10M}{3}$
<i>linha1</i>	0	$5/12$	0	1	$1/12$	$-1/12$	0	$7/3$	$s_1 = 7/3$
<i>linha2</i>	0	$1/3$	1	0	$-1/3$	$1/3$	0	$20/3$	$x_2 = 20/3$
<i>linha3</i>	0	$2/3$	0	0	$1/3$	$-1/3$	1	$10/3$	$a_3 = 10/3$

x_1 entra na base, saindo a_3 :

	z	x_1	x_2	s_1	e_2	a_2	a_3	rhs	VB
<i>linha0</i>	1	0	0	0	$-1/2$	$\frac{1-2M}{2}$	$\frac{3-2M}{2}$	25	$z = 25$
<i>linha1</i>	0	0	0	1	$-1/8$	$1/8$	$-5/8$	$1/4$	$s_1 = 1/4$
<i>linha2</i>	0	0	1	0	$-1/2$	$1/2$	$-1/2$	5	$x_2 = 5$
<i>linha3</i>	0	1	0	0	$1/2$	$-1/2$	$3/2$	5	$x_1 = 5$

(Este quadro é ótimo; qualquer das variáveis não básicas piora o objectivo se entrar na base.)

Análise de sensibilidade: intuição gráfica

Análise de sensibilidade: intuição gráfica

- Retomemos um problema apresentado há algumas aulas atrás:
 - fabrico de mesas (x_1) e de cadeiras (x_2)
 - lucro: 3€/mesa, 2€/cadeira
 - recursos: 100 horas de acabamentos, 80 horas de carpintaria
 - vendas de mesas inferiores a 40 unidades.

Resolução gráfica:

Formulação em programação linear

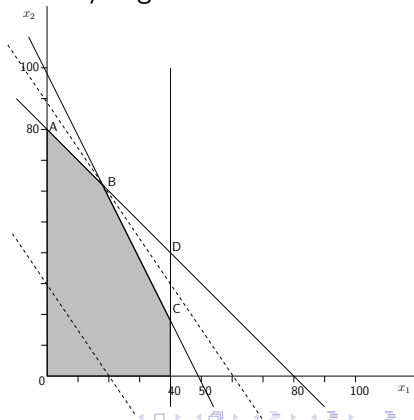
$$\text{maximizar } z = 3x_1 + 2x_2$$

$$\text{sujeito a : } 2x_1 + x_2 \leq 100$$

$$x_1 + x_2 \leq 80$$

$$x_1 \leq 40$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

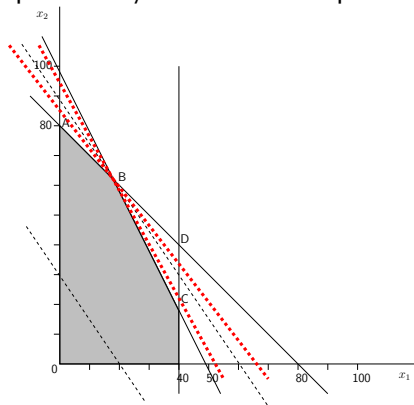


Modificações nos coeficientes da função objectivo

Se a contribuição para o lucro de cada mesa aumentar suficientemente, no óptimo iremos produzir mais mesas.

- Aumentar o coeficiente de x_1 ou diminuir o de $x_2 \Rightarrow$ aumenta o incentivo para produzir mesas (x_1);
- Aumentar o coeficiente de x_2 ou diminuir o de $x_1 \Rightarrow$ aumenta o incentivo para produzir cadeiras (x_2);

Questão: para que valores de c_1 é que a solução se mantém óptima?



Modificações nos coeficientes da função objectivo

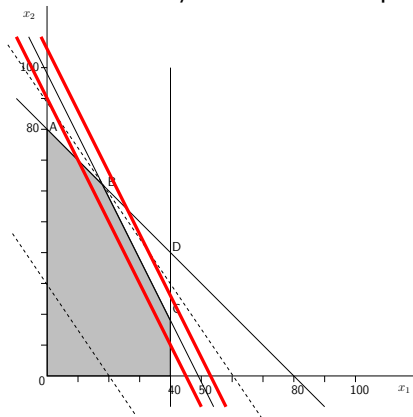
- Linha de isocusto: $z = 3x_1 + 2x_2 = \text{constante}$
- Colocando x_2 em função de x_1 : $x_2 = -3/2x_1 + \text{constante}'$
- Se a recta de isolucro ficar mais inclinada do que BC $\Rightarrow$ ponto óptimo passa para C
- Se a recta de isolucro ficar menos inclinada do que AB $\Rightarrow$ ponto óptimo passa para A
- O ponto óptimo mantém-se em B (mas com lucro diferente) para $2 \leq c_1 \leq 4$
- De uma forma geral: $z = c_1x_1 + c_2x_2 \Rightarrow x_2 = -c_1/c_2x_1 + \text{constante}$
 - este declive deverá ser comparado com o das restrições activas.

Modificações num termo independente

Se alterarmos a quantidade de um recurso, como se modificará a solução óptima?

- A restrição correspondente é deslocada paralelamente;
- Variações superiores a certos valores implicam alteração do ponto óptimo:
 - restrições activas deixam de o ser
 - vice-versa

Questão: para que valores de b_i é que a base da solução se mantém óptima?



Modificações num termo independente

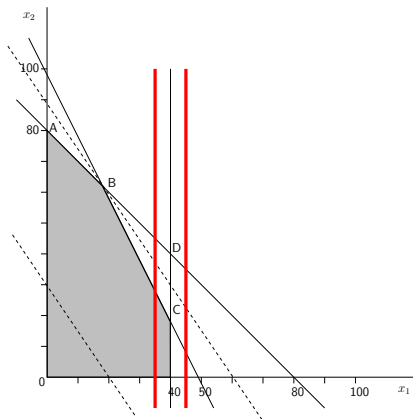
- Restrição (1): $2x_1 + x_2 \leq 100$
- Para que valores de b_1 é que a base da solução actual se mantém óptima? Seja $b_1 = 100 + \Delta$
- A solução actual é dada pela intersecção de (1) e (2):
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 100 + \Delta \\ x_1 + x_2 = 80 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = 20 + \Delta \\ x_2 = 60 - \Delta \end{cases}$$
- Aumentando b_1 diminui o número de cadeiras e aumenta o número de mesas produzidas na solução óptima.
- Variação no valor do objectivo:

$$z' = 3x_1 + 2x_2 = 3(20 + \Delta) + 2(60 - \Delta) = 180 + \Delta$$

- **Preço sombra** da restrição i : quantidade em que z^* melhora se se aumentar b_i em 1
 - neste caso: preço sombra = coeficiente de $\Delta = 1$.

Modificações num termo independente

- Restrição (3): $x_1 \leq 40$;
seja $b_3 = 40 + \Delta$
- Ponto óptimo não é alterado
para $\Delta \geq -20$
- Preço sombra é nulo.
- Variável de desvio $s_i > 0 \Rightarrow$
preço sombra associado à
restrição i é nulo.



Estudaremos nas próximas aulas estas propriedades no contexto da dualidade.

- Variáveis artificiais
- Método do *Big M*
- Quadros do simplex nos casos especiais em otimização linear
 - problemas **impossíveis**
 - usando o método do Big M $\rightarrow$ variável artificial com valor positivo na solução ótima
 - problemas **ilimitados**: objetivo pode melhorar indefinidamente
 - entra uma variável na base
 - nenhuma restrição a impede de ter valores arbitrariamente altos
 - **solução única**
 - na solução ótima não há variáveis $= 0$ com custo reduzido $= 0$
 - **soluções múltiplas**
 - na solução ótima há variáveis iguais a zero com custo reduzido $= 0$
 - se uma dessas variáveis entrar na base, o objetivo não se altera
- Programação linear: análise de sensibilidade, interpretação económica.

- Dualidade em programação linear.