Métodos de Apoio à Decisão

Dualidade em Otimização Linear

João Pedro Pedroso

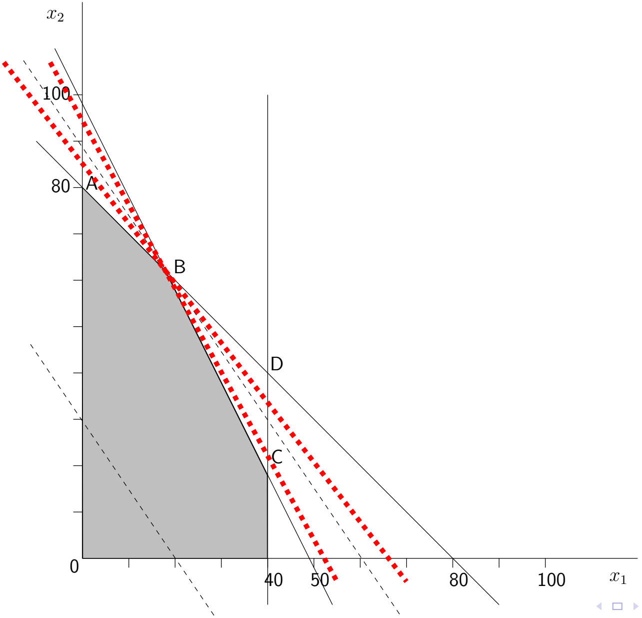
2024/2025

Aula passada

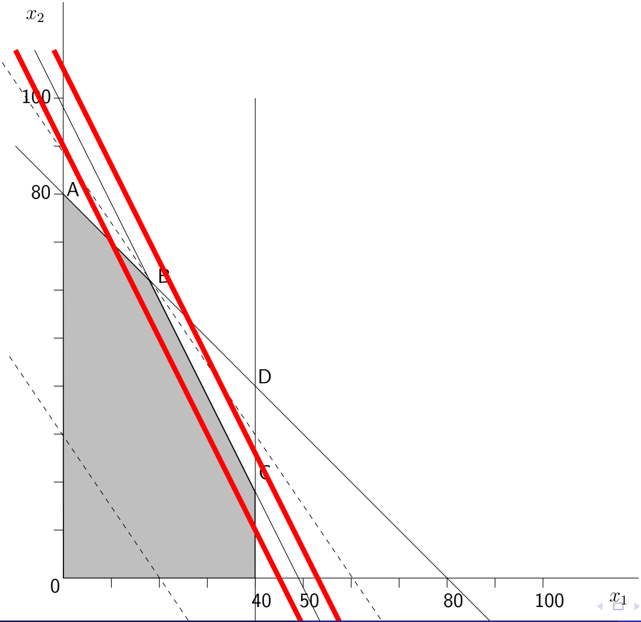
Noções estudadas:

- Variáveis artificiais
- Método do *Big M*
- Programação linear: análise de sensibilidade (intuição gráfica)

Modificações nos coeficientes da função objectivo



Modificações num termo independente



Dualidade

Dualidade: Problemas de otimização "normais"

Problema de maximização "normal":

- todas as restrições são do tipo $\leq$;
- todas as variáveis são não negativas.

Problema de minimização "normal":

- todas as restrições são do tipo $\geq$;
- todas as variáveis são não negativas.

Introdução à dualidade

Todo o problema linear (o **primal**) tem associado um outro: o seu **dual**.

- O (problema) dual de um problema de maximização é um problema de minimização, e vice-versa.
- A cada **variável** do primal corresponde uma **restrição** no dual.
- A cada **restrição** do primal corresponde uma **variável** no dual.
- O dual de um problema normal é um problema normal.
- O dual do dual é o primal.

Primal e dual de um problema linear normal

Primal (n variáveis, m restrições):

$$
\begin{array}{rll}
\max z = & c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n & \\
\text{sujeito a} & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n & \leq b_1 \\
& a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n & \leq b_2 \\
& \ldots & \\
& a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n & \leq b_m \\
& x_1, x_2, \ldots, x_n & \geq 0
\end{array}
$$

Dual (m variáveis, n restrições):

$$
\begin{array}{rll}
\min w = & b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m & \\
\text{sujeito a} & a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m & \geq c_1 \\
& a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m & \geq c_2 \\
& \ldots & \\
& a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m & \geq c_n \\
& y_1, y_2, \ldots, y_m & \geq 0
\end{array}
$$

Dual de um problema linear não normal

Primal (maximização)	**Dual (minimização)**
restrição $\leq$	variável ≥ 0
restrição $=$	variável $\in \mathbb{R}$
restrição $\geq$	variável ≤ 0
variável ≥ 0	restrição $\geq$
variável $\in \mathbb{R}$	restrição $=$
variável ≤ 0	restrição $\leq$

Primal (minimização)	**Dual (maximização)**
restrição $\geq$	variável ≥ 0
restrição $=$	variável $\in \mathbb{R}$
restrição $\leq$	variável ≤ 0
variável ≥ 0	restrição $\leq$
variável $\in \mathbb{R}$	restrição $=$
variável ≤ 0	restrição $\geq$

Aplicações

- O problema dual pode ser resolvido de forma a identificar uma solução do primal.
  (Ex: no algoritmo do Simplex o número restrições têm maior peso computacional que o número de variáveis; se houver muitas restrições $\Rightarrow$ pode-se resolver o dual em vez do primal.)
- Algoritmo dual-simplex: permite evitar variáveis artificiais quando os coeficientes do objetivo são todos positivos.
- Supondo que se encontra uma solução primal x admissível e uma solução dual y admissível; se $cx = yb$ então as soluções são ótimas.
- Interpretação económica.

Uma companhia de mobiliário fabrica secretárias, mesas, e cadeiras. O fabrico de cada tipo de móvel requer madeira e dois tipos de trabalho especializado: acabamentos e carpintaria. A quantidade de cada destes recursos necessárias para o fabrico de cada móvel são as seguintes:

Recurso	Secretárias	Mesas	Cadeiras
madeira	8 tábuas	6 tábuas	1 tábuas
acabamentos	4 horas	2 horas	1.5 horas
carpintaria	2 horas	1.5 horas	0.5 horas

Dispõe-se de 48 tábuas, 20 horas de acabamentos, e 8 horas de carpintaria. O preço de venda é de 60 euros para secretárias, 30 euros para mesas, e 20 euros para cadeiras.
Como todos os recursos foram já comprados, pretende-se estabelecer o plano de produção que maximiza a receita.

Formulação

Primal:

$$
\begin{aligned}
\text{maximizar } z = \quad & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{sujeito a} \quad & 8x_1 + 6x_2 + x_3 & \leq 48 & \quad (\textit{tabuas}) \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 & \leq 20 & \quad (\textit{acabamentos}) \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 & \leq 8 & \quad (\textit{carpintaria}) \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0 &
\end{aligned}
$$

Formulação

Primal:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{maximizar } z = & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & & \\
\text{sujeito a} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 & \leq 48 & (tabuas) \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 & \leq 20 & (acabamentos) \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 & \leq 8 & (carpintaria) \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

Dual:

$$
\begin{array}{rlll}
\text{minimizar } w = & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & & \\
\text{sujeito a} & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 & \geq 60 & (secretarias) \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 & \geq 30 & (mesas) \\
& y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 & \geq 20 & (cadeiras) \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq 0 &
\end{array}
$$

- Um comprador interessado nos recursos da empresa, quanto deve pagar por cada unidade dos seus recursos?
- Seja y_1, y_2, y_3 o preço pago por cada unidade de tábuas, acabamentos e carpintaria, respetivamente.
  1. A empresa tem disponíveis 48 tábuas, 20 horas de acabamentos e 8 horas de carpintaria $\Rightarrow$ preço total a pagar:

  $$48y_1 + 20y_2 + 8y_3$$

  2. Restrições:
     - pela quantidade $8y_1 + 4y_2 + 2y_3$, deverá oferecer pelo menos 60 euros (caso contrário a empresa produziria uma secretária, e vendê-la-ia por esse preço)
     - para mesas: $6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 \geq 30$
     - para cadeiras: $y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 \geq 20$
- No seu conjunto, isto dá-nos o problema dual.

Preços sombra

- *preço sombra* associado à restrição i é a variação do valor ótimo do objetivo(*) para uma variação marginal de b_i:

$$\Delta z = y_i \, \Delta b_i$$

  - Em restrições $\leq \rightarrow$ o valor y_i da variável dual é não negativo
  - Em restrições $\geq \rightarrow$ o valor y_i da variável dual é não positivo
  - Em restrições $= \rightarrow$ a variável dual y_i pode ser positiva, negativa, ou zero

Em termos absolutos:

- relaxar uma restrição melhora (ou mantém) o objetivo
- tornar uma restrição mais forte piora (ou mantém) o objetivo

((*) Nota: isto só é verdade se não houver alterações na base.)

Custos reduzidos

- **Custo reduzido** de uma variável não básica (em termos absolutos) é o valor que o *coeficiente no objetivo* dessa variável deverá melhorar para que a variável entre na base.
- É também o valor que z piora se se aumentar o valor da variável de 0 (na solução ótima) para 1.
  - mais geralmente sendo r_j o custo reduzido de x_j $\rightarrow$

$$\Delta z = r_j \, \Delta x_j$$

- Em valor absoluto, é igual à variável de desvio da restrição do problema dual que corresponde a esta variável primal.

((*) Nota: isto só é verdade se não houver alterações na base.)

No exemplo anterior: solução ótima:

Primal:

$$
\begin{array}{rll}
\text{maximizar } z = & 60x_1 + 30x_2 + 20x_3 & \\
\text{sujeito a} & 8x_1 + 6x_2 + x_3 & \leq 48 \quad (\textit{tabuas}) \\
& 4x_1 + 2x_2 + 1.5x_3 & \leq 20 \quad (\textit{acabamentos}) \\
& 2x_1 + 1.5x_2 + 0.5x_3 & \leq 8 \quad (\textit{carpintaria}) \\
& x_1, x_2, x_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$z = 280, x_1 = 2, x_2 = 0, x_3 = 8, s_1 = 24, s_2 = 0, s_3 = 0$

Dual:

$$
\begin{array}{rll}
\text{minimizar } w = & 48y_1 + 20y_2 + 8y_3 & \\
\text{sujeito a} & 8y_1 + 4y_2 + 2y_3 & \geq 60 \quad (\textit{secretarias}) \\
& 6y_1 + 2y_2 + 1.5y_3 & \geq 30 \quad (\textit{mesas}) \\
& y_1 + 1.5y_2 + 0.5y_3 & \geq 20 \quad (\textit{cadeiras}) \\
& y_1, y_2, y_3 & \geq 0
\end{array}
$$

$w = 280, y_1 = 0, y_2 = 10, y_3 = 10, e_1 = 0, e_2 = 5, e_3 = 0$

Software

Como ler os valores das variáveis duais, e custos reduzidos na solução ótima com `glpsol`?

- Variáveis (*columns*):
    - `Activity` $\rightarrow$ valor
    - `Marginal` $\rightarrow$ custo reduzido
    - `Lower/Upper Bound` $\rightarrow$ minorante/majorante
- Restrições (*rows*):
    - `Activity` $\rightarrow$ valor da expressão do lado esquerdo
    - `Marginal` $\rightarrow$ valor da variável dual associada
    - `Lower/Upper Bound` $\rightarrow$ termo independente

Exemplo anterior

```
var x1 >=0;
var x2 >=0;
var x3 >=0;

maximize z:      60*x1 +  30*x2 +  20*x3;

Tabuas:           8*x1 +   6*x2 +      x3  <= 48 ;
Acabamentos:      4*x1 +   2*x2 + 1.5*x3  <= 20 ;
Carpintaria:      2*x1 + 1.5*x2 + 0.5*x3  <= 8  ;
```

```
Problem:    lp
Rows:       4
Columns:    3
Non-zeros:  12
Status:     OPTIMAL
Objective:  z = 280 (MAXimum)

   No.   Row name   St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 z            B            280
     2 Tabuas       B             24                          48
     3 Acabamentos  NU            20                          20            10
     4 Carpintaria  NU             8                           8            10

   No. Column name  St   Activity     Lower bound   Upper bound    Marginal
------ ------------ -- ------------- ------------- ------------- -------------
     1 x1           B              2             0
     2 x2           NL             0             0                          -5
     3 x3           B              8             0

Karush-Kuhn-Tucker optimality conditions:
KKT.PE: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
KKT.PB: max.abs.err = 0.00e+00 on row 0
        max.rel.err = 0.00e+00 on row 0
        High quality
```

Em AMPL

```
var x1 >=0;  var x2 >=0;  var x3 >=0;
maximize z:     60*x1 +  30*x2 +  20*x3;
Tabuas:          8*x1 +   6*x2 +     x3  <= 48 ;
Acabamentos:     4*x1 +   2*x2 + 1.5*x3  <= 20 ;
Carpintaria:     2*x1 + 1.5*x2 + 0.5*x3  <= 8  ;

option solver gurobi;
solve;
display x1, x2, x3;
display x1.rc, x2.rc, x3.rc;
display Tabuas.dual, Acabamentos.dual, Carpintaria.dual;
display Tabuas.slack, Acabamentos.slack, Carpintaria.slack;
```

Output:

```
x1 = 2                   Tabuas.dual = 0
x2 = 0                   Acabamentos.dual = 10
x3 = 8                   Carpintaria.dual = 10
x1.rc = 0                Tabuas.slack = 24
x2.rc = -5               Acabamentos.slack = 0
x3.rc = 0                Carpintaria.slack = 0
```

Noções estudadas

- Problemas de maximização normal e de minimização normal
- Dual de um problema linear
- Interpretação económica da dualidade.
- Noções de preço sombra e de custo reduzido.

Próxima aula

- Propriedades da dualidade.