Métodos de Apoio à Decisão

Otimização com variáveis inteiras

João Pedro Pedroso

2024/2025

Aula passada: Noções estudadas

- simulação
  - noções e princípios gerais
- aplicação à gestão de projetos
  - caraterização do caminho e atividades críticas com simulação

Hoje:

- otimização com variáveis inteiras

Otimização com variáveis inteiras

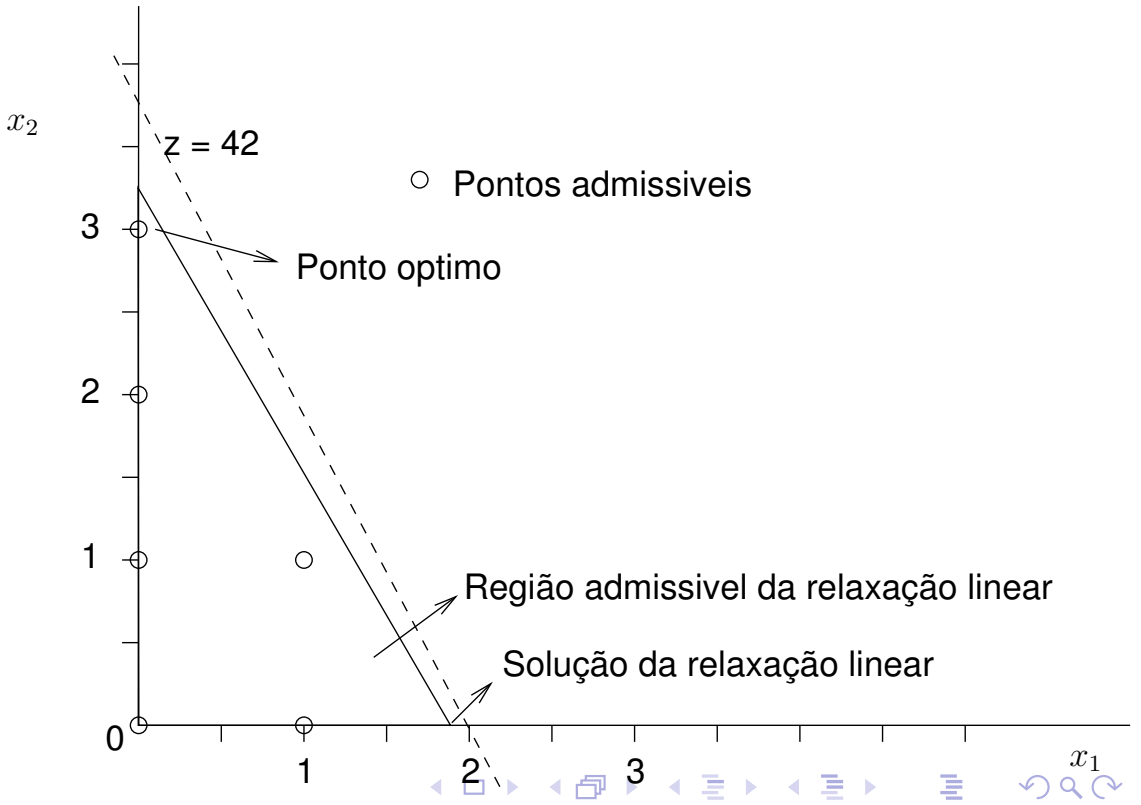
Em muitas situações práticas, problemas com restrições e objetivo lineares têm algumas variáveis que podem apenas assumir valores inteiros.

- **Otimização (linear) inteira pura**
  - todas as variáveis são inteiras.
- **Otimização (linear) inteira mista**
  - algumas variáveis são inteiras, outras são contínuas.
  - *MIP – mixed integer programming*
- **Relaxação linear**
  - problema linear em que se omitem todas as restrições de integralidade das variáveis.

Visualização

$$\begin{aligned} \text{maximizar } z = & \quad 21x_1 + 11x_2 \\ \text{sujeito a} \ : & \quad 7x_1 + 4x_2 \leq 13 \\ & \quad x_1, x_2 \geq 0; x_1, x_2 \text{ inteiros} \end{aligned}$$

- Solução da relaxação linear: $x_1 = 13/7, x_2 = 0$
- Arredondando:
  - para cima: $x_1 = 2, x_2 = 0$ (não admissível)
  - para baixo: $x_1 = 1, x_2 = 0$
- Solução óptima: $x_1 = 0, x_2 = 3$



Problemas de Programação Inteira

- Problemas de *Otimização Inteira/Programação Inteira* podem ser vistos como:
  - a relaxação linear
  - o conjunto de restrições de integralidade
- ou seja, a região admissível do problema inteiro está completamente contida na da relaxação linear.
- Para um problema de **maximização**: $z^*_{PL} \geq z^*_{PI}$
- Apesar de a região admissível de um PI ser um subconjunto da de um PL, a sua resolução é muito mais difícil.

Aplicações

Exemplo

Uma companhia está a considerar 4 oportunidades de investimento. Os montantes a investir e o valor presente líquido (VPL) associados a cada um dos projetos são os seguintes (em milhares de euros):

	Proj. 1	Proj. 2	Proj. 3	Proj. 4
Investimento	5000	7000	4000	3000
VPL	16000	22000	12000	8000

Os valores disponíveis para investimento neste ano são de 14000 euros. Admite-se que cada um dos projetos pode ser realizável (a 100%) ou não (0%). A empresa quer determinar o valor que deverá investir em cada projeto por forma a maximizar a soma dos VPLs.

Exemplo

Uma companhia está a considerar 4 oportunidades de investimento. Os montantes a investir e o valor presente líquido (VPL) associados a cada um dos projetos são os seguintes (em milhares de euros):

	Proj. 1	Proj. 2	Proj. 3	Proj. 4
Investimento	5000	7000	4000	3000
VPL	16000	22000	12000	8000

Os valores disponíveis para investimento neste ano são de 14000 euros. Admite-se que cada um dos projetos pode ser realizável (a 100%) ou não (0%). A empresa quer determinar o valor que deverá investir em cada projeto por forma a maximizar a soma dos VPLs.

Formulação em programação matemática:

$$\begin{aligned} \text{maximizar } z = \quad & 16x_1 + 22x_2 + 12x_3 + 8x_4 & \\ \text{sujeito a} \ : \quad & 5x_1 + 7x_2 + 4x_3 + 3x_4 & \leq 14 \\ & x_j = 0 \text{ ou } x_j = 1, & j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Adicionar as seguintes restrições:

1. A companhia pode investir, no máximo, em dois projetos.
2. Se se efetuar o projeto 2, também tem de se efetuar o projeto 1.
3. Se se investir no projeto 2, não se pode investir no projeto 4.

Adicionar as seguintes restrições:

1. A companhia pode investir, no máximo, em dois projetos.
2. Se se efetuar o projeto 2, também tem de se efetuar o projeto 1.
3. Se se investir no projeto 2, não se pode investir no projeto 4.

Solução:

1. $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 2$
2. $x_1 \geq x_2$
3. $x_2 + x_4 \leq 1$

Problemas com custos fixos

Acabou de ser contratado por uma empresa têxtil que fabrica camisas, calções e calças. Para manufaturar cada tipo de roupa, a empresa aluga as máquinas apropriadas, aos preços por semana que se indicam abaixo. A manufatura de cada peça de roupa requer também as quantidades de tecido (metros) e de mão de obra (horas) que se seguem.
Semanalmente, dispõe-se de 150 horas de mão de obra e de 160 metros de tecido.
Os preços de venda e custos variáveis de cada peça indicam-se a seguir. Formule o problema de maximizar o lucro da empresa.

	camisas	calções	calças
Aluguer de máquinas (euros)	200	150	100
Mão de obra (horas)	3	2	6
Tecido	4	3	4
Preço de venda (euros/peça)	12	8	15
Custo variável (euros/peça)	6	4	8

- Variáveis: produção
  - x_1 número de camisas produzidas por semana
  - x_2 ... calções
  - x_3 ... calças
- Variáveis: aluguer de equipamento
  - $y_1 = 1$ se se produzir camisas, $y_1 = 0$ caso contrário
  - $y_2 = 1$ ... calções
  - $y_3 = 1$ ... calças

- Objetivo: maximizar lucro =
  $= (12x_1 + 8x_2 + 15x_3)$ $\rightarrow$ receita
  $-(6x_1 + 4x_2 + 8x_3)$ $\rightarrow$ custos variáveis
  $-(200y_1 + 150y_2 + 100y_3)$ $\rightarrow$ custos fixos
- maximizar $z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$
- sujeito a;
  - $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$ $\rightarrow$ mão de obra
  - $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$ $\rightarrow$ tecido disponível

- Objetivo: maximizar lucro =
  $= (12x_1 + 8x_2 + 15x_3)$ $\rightarrow$ receita
  $-(6x_1 + 4x_2 + 8x_3)$ $\rightarrow$ custos variáveis
  $-(200y_1 + 150y_2 + 100y_3)$ $\rightarrow$ custos fixos
- maximizar $z = 6x_1 + 4x_2 + 7x_3 - 200y_1 - 150y_2 - 100y_3$
- sujeito a;
  - $3x_1 + 2x_2 + 6x_3 \leq 150$ $\rightarrow$ mão de obra
  - $4x_1 + 3x_2 + 4x_3 \leq 160$ $\rightarrow$ tecido disponível
- solução: $x_1 = 30, x_3 = 10, x2 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$ (porquê?)

Problemas com custos fixos

- Temos de adicionar restrições que garantam que se se produz ($x_i > 0$), se incorre o correspondente custo fixo ($y_i = 1$):

$$x_i \leq M_i y_i$$

  - se $y_i = 0 \rightarrow y_i = 0$
  - se $y_i = 1 \rightarrow$ restrição não deve ser limitante
    - M_i deverá ser "suficientemente grande"
    - por razões de eficiência: o valor mais baixo que não limita x_i se $y_i = 1$
    - deverá ser o maior valor que x_i pode atingir
    - no exemplo: $M_1 = 40, M_2 = 53, M_3 = 25$

Solução de problemas com variáveis inteiras

```
var x1 >= 0;
var x2 >= 0;
var x3 >= 0;

var y1 >= 0, <=1, integer;
var y2 binary;
var y3 binary;

maximize z: 6*x1 + 4*x2 + 7*x3 - 200*y1 - 150*y2 - 100*y3;

labor: 3*x1 + 2*x2 + 6*x3 <= 150;
cloth: 4*x1 + 3*x2 + 4*x3 <= 160;

M1: x1 <= 40*y1;
M2: x2 <= 53*y2;
M3: x3 <= 25*y3;
```

Restrições "ou" (não exclusivo)

- Temos duas restrições na forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

$$g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

- Queremos garantir que **pelo menos** uma delas é verificada.

Restrições "ou" (não exclusivo)

- Temos duas restrições na forma

$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

$$g(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$$

- Queremos garantir que **pelo menos** uma delas é verificada.
- Solução:

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_n) \leq My \\ & g(x_1, \ldots, x_n) \leq M(1-y) \\ & y \in \{0, 1\} \end{aligned}$$

(em que M é um valor positivo suficientemente elevado para que, para qualquer solução admissível, se verifique $f(x_1, \ldots, x_n) \leq M$ e $g(x_1, \ldots, x_n) \leq M$)

Restrições "se . . . então "

- Queremos assegurar que se uma determinada restrição

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

se verifica, então a restrição

$$g(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

deverá ser satisfeita.
- No caso de $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$, então $g(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ poderá ser satisfeita ou não.
- $f > 0$ implica $g \geq 0$

Restrições "se . . . então"

- Queremos assegurar que se uma determinada restrição

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0$$

se verifica, então a restrição

$$g(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$$

deverá ser satisfeita.
- No caso de $f(x_1, \ldots, x_n) \leq 0$, então $g(x_1, \ldots, x_n) \geq 0$ poderá ser satisfeita ou não.
- $f > 0$ implica $g \geq 0$
- Solução:

$$-g(x_1, \ldots, x_n) \leq My$$
$$f(x_1, \ldots, x_n) \leq M(1 - y)$$
$$y \in \{0, 1\}$$

(em que M é um valor positivo suficientemente elevado para que, para qualquer solução admissível, se verifique $f(x_1, \ldots, x_n) \leq M$ e $g(x_1, \ldots, x_n) \leq M$)

Próxima aula

- Aplicações e técnicas em programação inteira
- Otimização com variáveis inteiras: algoritmo de pesquisa em árvore.