Métodos de Apoio à Decisão

Teoria de Jogos

João Pedro Pedroso

2024/2025

Última aula:

- Introdução à programação não linear

Hoje:

- Teoria de jogos (breve introdução)

Teoria de jogos

- Nos modelos que temos vindo a estudar, há apenas um decisor, que otimiza o seu processo e decide em função desse resultado
- Em muitos problemas, há várias decisões a tomar; algumas em simultâneo, outras em fases diferentes
- Teoria de jogos estuda casos em que há mais do que um decisor, e em que os interesses estão em conflito
- Hipótese de racionalidade: cada um dos jogadores assume que o outro irá jogar da melhor forma possível

Jogos de soma constante

1. Há dois jogadores (o jogador da linha e o jogador da coluna)
2. O jogador da linha decide uma de m estratégias; simultaneamente, o jogador da coluna decide uma de n estratégias
3. Se o jogador da linha escolher a estratégia i e o jogador da coluna a estratégia j, o jogador da linha ganha a_{ij} e o da coluna perde a_{ij}

- Este é um modelo de um jogo a duas pessoas com soma constante, representado pela matriz a_{ij} $\rightarrow$ tabela de proveitos
- Assume-se que cada jogador escolhe a melhor estratégia, tendo em conta que o seu oponente também irá jogar a estratégia ótima
    - hipótese de racionalidade

Exemplo

Estratégia linha	Estratégia coluna			mínimo linha
	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	
Linha 1	4	4	10	4
Linha 2	2	3	1	1
Linha 3	6	5	7	5
máximo coluna	6	5	10	

- Estratégia para *linha*: $\max(4,1,5) = 5$
- Estratégia para *coluna*: $\min(6,5,10) = 5$
- Neste caso: max(mínimo da linha) = min(máximo da coluna) $\rightarrow$ **ponto de sela** (ou *equilíbrio*).
- Caso geral: estratégias com *probabilidades* (cada jogador determina a probabilidade de jogar cada uma das estratégias).

Caso mais geral

Estratégia linha	Estratégia coluna			mínimo linha
	Coluna 1	Coluna 2	Coluna 3	
Linha 1	0	-2	2	-2
Linha 2	5	4	-3	-3
Linha 3	2	3	-4	-4
máximo coluna	5	4	2	

- Estratégia para *linha*: max(-2,-3,-4) $=$ -2
- Estratégia para *coluna*: min(5,4,2) $=$ 2
- Neste caso: max(mínimo da linha) $\neq$ min(máximo da coluna) $\Rightarrow$ **solução instável**
- **Estratégias mistas:**
  - x_i — probabilidade de o jogador 1 usar a estratégia i, $i = 1, \ldots, m$;
  - y_j — probabilidade de o jogador 2 usar a estratégia j, $i = 1, \ldots, n$;

Formulação

- Resultado esperado para jogador 1: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j$
- Estratégia é ótima sse: $\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{ij} x_i y_j \geq v$ para qualquer estratégia do jogador 2
- A desigualdade também é válida para estratégias puras do jogador 2: jogar $y_j = 1$, e todos os outros $y_{j'} = 0$; isto conduz a

$$\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \geq y_j v, \text{ for } j = 1, \ldots, n$$

- Somando para todo o j (e substituindo $\sum_{j=1}^{n} y_j = 1$):

$$\sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m} p_{ij} x_i \right) \geq \sum_{j=1}^{n} y_j v = v$$

- Adicionando as restrições $\sum_{i=1}^{m} x_i = 1$ e $x_i \geq 0$, obtém-se a formulação completa.

Formulação para o problema do jogador 1:

$$
\begin{aligned}
\text{maximize} \quad & v \\
\text{subject to} \quad : v \leq \quad & p_{11}x_1 + p_{21}x_2 + \ldots + p_{m1}x_m \\
v \leq \quad & p_{12}x_1 + p_{22}x_2 + \ldots + p_{m2}x_m \\
& \ldots \\
v \leq \quad & p_{1n}x_1 + p_{2n}x_2 + \ldots + p_{mn}x_m \\
& x_1 + x_2 + \ldots + x_m = 1 \\
& x_1, x_2, \ldots, x_m \geq 0
\end{aligned}
$$

O problema do jogador 2 é o dual deste:

$$
\begin{aligned}
\text{minimize} \quad & w \\
\text{subject to} \quad : w \geq \quad & p_{11}y_1 + p_{12}y_2 + \ldots + p_{1n}y_n \\
w \geq \quad & p_{21}y_1 + p_{22}y_2 + \ldots + p_{2n}y_n \\
& \ldots \\
w \geq \quad & p_{n1}y_1 + p_{n2}y_2 + \ldots + p_{mn}y_n \\
& y_1 + y_2 + \ldots + y_n = 1 \\
& y_1, y_2, \ldots, y_n \geq 0
\end{aligned}
$$

Teorema do minimax

Para jogos de soma constante:
Utilizando o teorema da dualidade forte, podemos demonstrar o **Teorema do minimax**: quando são permitidas estratégias mistas, o par de estratégias ótimas é uma solução estável: nenhum jogador pode fazer melhor alterando unilateralmente a sua estratégia.

Dilema do prisioneiro

- Dois prisioneiros participaram num roubo, e esperam o julgamento.
- Cada um deles tem duas estratégias possíveis: confessar o crime ou não confessar.
- Se nenhum confessar, cada um deles terá 1 ano de prisão.
- Se ambos confessarem, terão 5 anos de prisão.
- Se um confessar e ou outro não, quem confessou fica livre e quem não confessou tem 20 anos de prisão.

Prisioneiro 1	Prisioneiro 2	
	confessa	não confessa
confessa	(-5,-5)	(0, -20)
não confessa	(-20,0)	(-1,-1)

- A estratégia de confessar domina (qualquer que seja a estratégia do oponente, o melhor é confessar).

Nota: este não é um jogo de soma constante.

Caso mais geral

Jogador 1	Jogador 2	
	NC	C
NC	(P,P)	(T,S)
C	(S,T)	(R,R)

em que:

- NC - não cooperar
- C - cooperar
- P - punição por não cooperar (nenhum coopera)
- S - resultado quando se coopera e o oponente não
- R - recompensa quando ambos cooperam
- T - tentação: recompensa se não cooperar quando o oponente coopera

Jogos entre firmas

Equilíbrio de Cournot

- Duas ou mais empresas decidem que quantidades colocam no mercado, cada uma conhecendo o que as outras irão fazer
- Todas as empresas jogam ao mesmo tempo.

Equilíbrio de Stackelberg

- Duas ou mais empresas decidem que quantidades colocam no mercado, cada uma conhecendo o que as outras irão fazer.
- Uma empresa (líder) joga antes das outras, mas tem em conta a reacção que estas terão.

Equilíbrio de Bertrand

- Duas ou mais empresas competem em preço (e não em quantidade).

Noções estudadas

- Teoria de jogos: noções básicas.

Próxima aula

- Cadeias de Markov