

Métodos de Apoio à Decisão

Cadeias de Markov

João Pedro Pedroso

2024/2025

- Última aula: Teoria de jogos: noções básicas.
- Hoje: Cadeias de Markov

Processos estocásticos

- Suponhamos que observamos um conjunto de caraterísticas de um sistema em instantes de tempo discretos $0, 1, 2, \dots$
- A caraterística do sistema no instante t denota-se por X_t , e no contexto de processos estocásticos é uma *variável aleatória*
- Um processo estocástico com tempo discreto é uma descrição das relações entre as variáveis aleatórias $X_0, X_1, \dots$

Cadeias de Markov

- São processos estocásticos; nesta aula estudaremos apenas processos com tempo discreto.
- Em cadeias de Markov, o estado em $t + 1$ depende do estado em t , mas não depende dos estados anteriores.

Exemplo 1: a ruína do jogador

- Em $t = 0$ tenho 2 euros.
- Em $t = 1, 2, \dots$ posso fazer apostas de 1 euro.
- Com probabilidade p ganho, $1 - p$ perco.
- O jogo acaba se ficar com 0 euros, ou quando ganhar 4 euros.

Este é um processo estocástico, em que X_t é a posição de capital após t apostas.

- Se $X_t = 0 \Rightarrow X_{t+1} = X_{t+2} = \dots = 0$
- Se $X_t = 4 \Rightarrow X_{t+1} = X_{t+2} = \dots = 4$

Exemplo 2: urna com bolas

- Uma urna contém presentemente duas bolas por pintar.
- Tiramos uma bola ao acaso, e lançamos uma moeda ao ar.
- Se for uma bola sem cor e
 - no lançamento da moeda sair cara, pintamos a bola de vermelho;
 - se sair coroa, pintamos a bola de preto.
- Se a bola estiver pintada, alteramos a sua cor:
 - se for vermelha pintamos de preto;
 - se for preta pintamos de vermelho.

Urna com bolas: modelo

- Definimos t como sendo o instante em que se atirou a moeda ao ar pela t -ésima vez;
- Para qualquer t , o estado pode ser definido como um vetor $[s \ v \ p]$, correspondendo ao que existe na urna:
 - $s \rightarrow$ número de bolas sem cor
 - $v \rightarrow$ número de bolas vermelhas
 - $p \rightarrow$ número de bolas pretas
- Temos então:
 - $X_0 = [2 \ 0 \ 0]$
 - $X_1 = [1 \ 1 \ 0]$ ou $[1 \ 0 \ 1]$
 - $X_2 = \dots$
- Há relações entre os X_t ; por exemplo, se $X_t = [0 \ 2 \ 0]$ então é certo que $X_{t+1} = [0 \ 1 \ 1]$

Cadeias de Markov: descrição matemática

- Notação: $P(X = i)$ é a probabilidade do sistema estar no estado i
- O estado em $t + 1$ depende do estado em t , mas não depende dos estados anteriores:

$$P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t, X_{t-1} = i_{t-1}, \dots, X_0 = i_0) = P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i_t)$$

- Se adicionalmente $P(X_{t+1} = i_{t+1} | X_t = i)$ for independente de t (*hipótese de estacionaridade*), podemos escrever:

$$P(X_{t+1} = j | X_t = i) = p_{ij}$$

em que p_{ij} é a probabilidade de se passar do estado i no instante t para o estado j no instante $t + 1$

- Chama-se a isso uma **transição de i para j**
- Na maior parte das aplicações, estes valores são fornecidos através da *matriz de probabilidades de transição*
- As cadeias de Markov nestas condições são chamadas *estacionárias*

Nota: existem também processos estocásticos contínuos, em que o estado do sistema pode ser observado em qualquer instante

Propriedades das transições

Matriz de probabilidades de transição ($0 \leq p_{ij} \leq 1$)

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

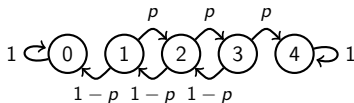
- Se o estado do sistema em t for i , em $t + 1$ terá de estar num estado qualquer; ou seja, $\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1$.
- Precisamos também de conhecer o estado do sistema no instante inicial; seja $q_i = P(X_0 = i)$ a distribuição inicial da cadeia de Markov, dada através de:

$$q = [q_1 \ q_2 \ \dots \ q_s]$$

Exemplo: a ruína do jogador

- O dinheiro que tenho após $t + 1$ apostas depende apenas do dinheiro que tenho no instante $t \rightarrow$ cadeia de Markov
- As regras do jogo não se alteram com o tempo, por isso a cadeia é estacionária
- Os estados possíveis são 0, 1, 2, 3, 4 euros
- A matriz de transições é:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1-p & 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 1-p & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 1-p & 0 & p \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Exemplo: urna com bolas

- O estado da urna após $t + 1$ transições depende apenas do dinheiro que tenho no instante $t \implies$ cadeia de Markov;
- As regras do jogo não se alteram com o tempo $\implies$ cadeia estacionária;
- Os estados possíveis são $[0 \ 1 \ 1]$, $[0 \ 2 \ 0]$, $[0 \ 0 \ 2]$, $[2 \ 0 \ 0]$, $[1 \ 1 \ 0]$, $[1 \ 0 \ 1]$
- A matriz de transições é:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/4 & 0 & 1/4 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

- Por exemplo, se o estado actual for $[1 \ 1 \ 0]$, as possibilidades são:
 - 1 sair cara e tirar a bola por pintar (probabilidade = $1/4$) $\implies [0 \ 2 \ 0]$
 - 2 sair coroa e tirar a bola por pintar (probabilidade = $1/4$) $\implies [0 \ 1 \ 1]$
 - 3 tirar a bola vermelha (probabilidade = $1/2$) $\implies [1 \ 0 \ 1]$

Probabilidades de transição em n passos

- Se uma cadeia de Markov está no estado i no instante m , qual é a probabilidade de n períodos mais tarde estar no estado j ?
- Esta probabilidade é independente de $m \implies$ podemos escrever:

$$P(X_{m+n} = j | X_m = i) = P(X_n = j | X_0 = i) = p_{ij}(n)$$

em que $p_{ij}(n)$ é a probabilidade de transição em n passos do estado i para o estado j

- Claramente, $p_{ij}(1) = p_{ij}$
- $p_{ij}(2) = \sum_{k=1}^s (\text{prob.trans. } i \rightarrow k)(\text{prob.trans. } k \rightarrow j) = \sum_{k=1}^s p_{ik}p_{kj}$
 - produto escalar da linha i pela coluna j
 - elemento i, j da matriz P^2
- Estendendo este raciocínio: $p_{ij}(n) =$ elemento i, j da matriz P^n

Exemplo: fidelização de clientes

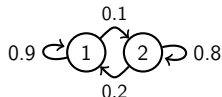
- Suponhamos que toda a indústria produz duas marcas de bebida: A-cola e B-cola
- Se um cliente comprou A-cola da última vez, tem 90% de probabilidade de voltar a comprar A-cola
- Se comprou B-cola da última vez, tem 80% de probabilidade de voltar a comprar B-cola

Questões:

- 1 Um cliente que actualmente compra B-cola, com que probabilidade comprará A-cola dentro de duas compras?
- 2 Um cliente que actualmente compra A-cola, com que probabilidade comprará A-cola dentro de três compras?

- **Estado** — tipo de cola na última compra:
 - estado 1 = A-cola
 - estado 2 = B-cola
- Seja X_0 o tipo de cola na última compra, e X_n o que será comprado na n -ésima futura compra;
- $X_0, X_1, \dots$ pode ser descrito por uma cadeia de Markov com

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$



- ❶ $P(X_2 = 1 | X_0 = 2) = p_{21}(2) = \text{elemento } 2,1 \text{ de } P^2$

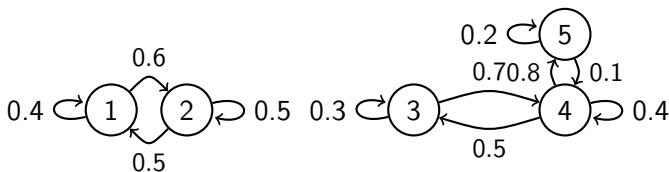
$$P^2 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.83 & 0.17 \\ 0.34 & 0.66 \end{bmatrix}$$

- ❷ $p_{11}(3) = \text{elemento } 1,1 \text{ de } P^3$

$$P^3 = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0.781 & 0.219 \\ 0.438 & 0.562 \end{bmatrix}$$

Classificação dos estados de cadeias de Markov

- Dados dois estados i e j , um **caminho** entre i e j é uma *sequência de transições* tal que cada transição tem probabilidade de ocorrência estritamente positiva.

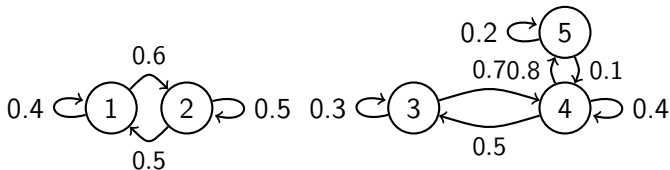


- O estado j é **alcançável** a partir do estado i se houver um caminho de i para j .
- Diz-se que dois estados i, j **comunicam entre si** se j for alcançável a partir de i e vice-versa.

5 é alcançável a partir de 3, mas não a partir de 1
1 e 2 comunicam

- Um conjunto de estados S é um **conjunto fechado** se nenhum estado fora de S é alcançável por qualquer dos elementos de S

$S_1 = \{1, 2\}$ $S_2 = \{3, 4, 5\}$ são conjuntos fechados



- Um estado i é **absorvente** se $p_{ii} = 1$.

Estados 0 e 4 na ruína do jogador.

- Um estado i é **transiente** se há um estado **absorvente** j que é alcançável a partir de i

A probabilidade de se estar em estados transientes diminui com o número de transições; no limite, quando esse número tende para infinito, é nula

- Um estado que não é transiente é **recorrente**.

Todos os estados no diagrama anterior.

Estados 0 e 4 na ruína do jogador.

- Um estado i é **periódico** com período $k > 1$ se k é o menor número tal que todos os caminhos desde o estado i até esse mesmo estado i têm comprimento que é múltiplo de k .
- Um estado recorrente que não é periódico diz-se **aperiódico**.

Na cadeia com matriz de transições $Q = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ todos os estados são periódicos, com período 3.
(Caminho 1 - 2 - 3 - 1)

- Se todos os estados de uma cadeia são *recorrentes* e *aperiódicos*, e *comunicam entre si*, essa cadeia diz-se **ergódica**.

$P_1 = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ é ergódica.

$P_2 = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2/3 & 1/3 \\ 0 & 0 & 1/4 & 3/4 \end{bmatrix}$ não é ergódica.

Exemplo: fidelização de clientes

- Suponhamos que toda a indústria produz duas marcas de bebida: A-cola e B-cola;
- Se um cliente comprou A-cola da última vez, tem 90% de probabilidade de voltar a comprar A-cola;
- Se comprou B-cola da última vez, tem 80% de probabilidade de voltar a comprar B-cola;

Questões:

- ① Um cliente que actualmente compra B-cola, com que probabilidade comprará A-cola dentro de duas compras?
- ② Um cliente que actualmente compra A-cola, com que probabilidade comprará A-cola dentro de três compras?
- ③ Para um número de transições elevado, como variam as probabilidades de se passar de um estado para outro?
 - $P^{(n)} = P \cdot P \cdot \dots \cdot P$
 - $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j | X_0 = i)$
 - probabilidade de em n transições passar do estado i para o estado j .
 - probabilidade de se estar no estado j em $t = n$:

$$\sum_{i=1}^s q_i p_{ij}(n)$$

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

n	$p_{11}(n)$	$p_{12}(n)$	$p_{21}(n)$	$p_{22}(n)$
1	0.9	0.1	0.2	0.8
2	0.83	0.17	0.34	0.66
3	0.781	0.219	0.438	0.562
4	0.747	0.253	0.507	0.493
5	0.723	0.277	0.555	0.445
6	0.706	0.294	0.588	0.412
7	0.694	0.306	0.612	0.388
8	0.686	0.314	0.628	0.372
9	0.68	0.32	0.64	0.36
10	0.676	0.324	0.648	0.352
11	0.673	0.327	0.653	0.347
12	0.671	0.329	0.657	0.343
13	0.67	0.33	0.66	0.34
14	0.669	0.331	0.662	0.338
15	0.668	0.332	0.664	0.336
16	0.668	0.332	0.664	0.336
17	0.667	0.333	0.665	0.335
18	0.667	0.333	0.666	0.334
19	0.667	0.333	0.666	0.334
20	0.667	0.333	0.666	0.334
21	0.667	0.333	0.666	0.334
22	0.667	0.333	0.666	0.334
23	0.667	0.333	0.666	0.334
24	0.667	0.333	0.667	0.333
25	0.667	0.333	0.667	0.333

Estado estacionário

No exemplo anterior vimos que, depois dos primeiros períodos, a probabilidade de escolher A-cola é 67%, e de escolher B-cola é 33%;

- Esses valores estabilizam após o período transitório;
- Essas probabilidades não dependem do estado inicial;
- A essa situação dá-se o nome de *estado estacionário*.

Theorem

Seja P a matriz de transição de uma cadeia com s estados, ergódica; então existe um vetor $\Pi = [\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_s]$ tal que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P^n = \begin{bmatrix} \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \pi_1 & \pi_2 & \dots & \pi_s \end{bmatrix}$$

- independentemente do estado inicial, após um número elevado de transições estaremos no estado j com probabilidade π_j
- ao vetor Π chama-se **distribuição de equilíbrio** da cadeia de Markov

- Por definição de estado estacionário, quando aplicamos uma transição ao sistema nesse estado, obtemos o mesmo estado; ou seja:

$$[\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_s] = [\pi_1 \ \pi_2 \ \dots \ \pi_s] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1s} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2s} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ p_{s1} & p_{s2} & \dots & p_{ss} \end{bmatrix}$$

- Na forma matricial:

$$\Pi = \Pi P$$

- Este sistema de equações é indeterminado (o rank da matriz P é sempre $\leq s - 1$).
- Para obtermos uma solução, adicionamos uma equação $p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{is} = 1$, que no limite quando $n \rightarrow \infty$ fica:

$$\pi_1 + \pi_2 + \dots + \pi_s = 1$$

Exemplo: *-cola

- Neste problema temos uma cadeia ergódica (porquê?);
- A matriz de transição é:

$$P = \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix}$$

- O sistema de equações fica então:

$$[\pi_1 \pi_2] = [\pi_1 \pi_2] \begin{bmatrix} 0.9 & 0.1 \\ 0.2 & 0.8 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = .90\pi_1 + .20\pi_2 \\ \pi_2 = .10\pi_1 + .80\pi_2 \end{cases}$$

- Substituindo a segunda equação por $\pi_1 + \pi_2 = 1$ obtemos:

$$\begin{cases} \pi_1 = .90\pi_1 + .20\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 2/3 \\ \pi_2 = 1/3 \end{cases}$$

Exemplo: utilização na tomada de decisão

- No exemplo das colas, suponhamos que cada consumidor compra uma cola por semana, 52 semanas por ano, e que há 100 milhões de consumidores nos EUA. Cada cola custa \$1 à empresa, e é vendida por \$2.
- Uma empresa de publicidade propõe-se a fazer uma campanha que permite baixar de 10% para 5% a fracção de consumidores de A-cola que depois mudam para B-cola.
- Determine qual é o valor máximo que a empresa estará disposta a pagar por essa campanha.

Resolução:

- Presentemente há $\pi_A = 2/3$ dos consumidores que compram A-cola;
- O lucro actual é de $2/3 \times 52 \times 100 \times (2 - 1) = 3467$ milhões de dólares
- Após a campanha, a matriz de transição será: $P = \begin{bmatrix} 0.95 & 0.05 \\ 0.20 & 0.80 \end{bmatrix}$
- No equilíbrio, teremos:

$$\begin{cases} \pi_1 = .95\pi_1 + .20\pi_2 \\ \pi_2 = .05\pi_1 + .80\pi_2 \\ \pi_1 + \pi_2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi_1 = 0.8 \\ \pi_2 = 0.2 \end{cases}$$

- O novo lucro será $0.8 \times 5200 = 4160$ milhões de dólares; a empresa estará disposta a pagar até $4160 - 3467 = 693$ milhões de dólares por ano.

Cadeias com absorção

Nestas cadeias

- Alguns estados são absorventes, outros são transientes;
- Se começarmos num estado transiente, sabemos que iremos acabar num estado absorvente.

Exemplo: Dívidas cobráveis

Uma empresa considera que uma dívida é incobrável se há mais de 3 meses de atraso no seu pagamento. No início de cada mês cada conta é classificada em um dos seguintes estados:

- ① nova conta
- ② pagamento da conta está com 1 mês de atraso
- ③ pagamento da conta está com 2 meses de atraso
- ④ pagamento da conta está com 3 meses de atraso
- ⑤ conta foi paga
- ⑥ conta foi considerada crédito mal parado

Os dados históricos permitem modelar as transições entre estados como uma cadeia de Markov:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0 & 0.4 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.7 & 0.3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

em que

- estados absorventes são 5 (conta paga) e 6 (crédito mal parado).
- os restantes são estados transientes

Questões:

1. Qual é a probabilidade de uma nova conta ser paga?
2. Qual é a probabilidade de um pagamento com 1 mês de atraso se tornar num crédito mal parado?
3. Se as vendas médias da firma forem de 100000 euros/mês, que montante fica anualmente por receber?

Exemplo: Planeamento de um grupo de trabalho

- Uma empresa de software emprega três tipos de programadores:
 - recém-formados
 - experientes
 - associados
- Em cada ano há uma probabilidade de
 - 15% de um recém-formado ser promovido a experiente;
 - 5% de um recém-formado deixar a empresa;
 - 20% de um programador experiente passar a associado;
 - 10% de um programador experiente deixar a firma;
 - 5% de um associado deixar a firma.
- A empresa nunca despromove um programador.

Questões:

1. em média, quantos anos é que um recém-formado fica na firma?
2. qual é a probabilidade de um recém-formado deixar a firma antes de ser associado?
3. em média, quantos anos é que um associado fica na firma (como associado)?

Modelação:

	RF	E	A	D-NA	D-A
RF: recém-formado	0.80	0.15	0	0.05	0
E: experiente	0	0.70	0.20	0.10	0
A: associado	0	0	0.95	0	0.05
D-NA: deixa (não associado)	0	0	0	1	0
D-A deixa (associado)	0	0	0	0	1

Estados transientes: RF, E, A; Estados absorventes: D-A, D-NA.
(Assume-se que programadores que deixem a firma não regressam.)

Questões a que queremos responder em cadeias com absorção:

1. Se o estado inicial é transiente, qual é a **esperança para o número de vezes** que se entrará em cada estado antes de se atingir um estado absorvente? Quantos períodos se espera gastar em cada estado transiente antes de haver absorção ?
2. Quando se começa num determinado estado transiente, qual é **probabilidade de atingir** cada um dos estados absorventes?

Para responder a estas questões:

- 1 Escrever a matriz de transição com:
 - estados transientes primeiro
 - estados absorventes depois
- 2 Sejam $s - m$ estados transientes $t_1, t_2, \dots, t_{s-m}$
- 3 Sejam m estados absorventes $a_1, a_2, \dots, a_m$
- 4 A matriz de transição fica:

$$P = \begin{bmatrix} Q & R \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

em que:

- Q é a matriz $(s - m) \times (s - m)$ de transições entre estados transientes;
- R é a matriz $(s - m) \times m$ de transições de estados transientes a absorventes;
- 0 é a matriz nula $m \times (s - m)$;
- I é a matriz identidade $m \times m$;

Nos exemplos anteriores

Problema das cobranças

$$Q = \begin{bmatrix} 0 & 0.6 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.4 & 0 \\ 0.5 & 0 \\ 0.6 & 0 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

Planeamento de equipa

$$Q = \begin{bmatrix} 0.80 & 0.15 & 0 \\ 0 & 0.70 & 0.20 \\ 0 & 0 & 0.95 \end{bmatrix}$$

$$R = \begin{bmatrix} 0.05 & 0 \\ 0.10 & 0 \\ 0 & 0.05 \end{bmatrix}$$

Q1: número de períodos que se espera gastar em cada estado transiente antes de haver absorção

Partindo do estado t_i , a esperança para o número de períodos que se espera passar no estado t_j antes de haver absorção é dada pelo **elemento i, j da matriz $(I - Q)^{-1}$**

Q2: probabilidade de terminar em cada um dos estados absorventes

Partindo do estado t_i , a probabilidade de terminar no estado a_j é dada pelo **elemento i, j da matriz $(I - Q)^{-1}R$** .

$T = (I - Q)^{-1} = I + Q + Q^2 + \dots + Q^n + \dots$ é a **matriz fundamental** da cadeia de Markov.

- 1 A probabilidade de ir do i para j em 0 passos é q_{ij} ;
- 2 Em n passos: elemento (i, j) de Q^n ;
- 3 A soma para $n = 0, 1, \dots$ dá t_{ij} , que é a esperança para o número de vezes que se passa do estado i para j .

Problema das cobranças

```
import scipy
Q = scipy.matrix([[0, .6, 0, 0],
                  [0, 0, .5, 0],
                  [0, 0, 0, .4],
                  [0, 0, 0, 0]])
I = scipy.identity(4)
R = scipy.matrix([.4, 0],
                  [.5, 0],
                  [.6, 0],
                  [.7, .3]])

print (I-Q)
print (I-Q).I          # inverse
print (I-Q).I * R
```

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 1. & 0.6 & 0.3 & 0.12 \\ 0. & 1. & 0.5 & 0.2 \\ 0. & 0. & 1. & 0.4 \\ 0. & 0. & 0. & 1. \end{bmatrix} \quad (I - Q)^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.964 & 0.036 \\ 0.94 & 0.06 \\ 0.88 & 0.12 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}$$

1. Qual é a probabilidade de uma nova conta ser paga?

elemento (1,1) de $(I - Q)^{-1}R = .964$

2. Qual é a probabilidade de um pagamento com 1 mês de atraso se tornar num crédito mal parado?

elemento (2,2) de $(I - Q)^{-1}R = .06$

3. Se as vendas médias da firma forem de 100000 euros/mês, que montante fica anualmente por receber?

$1 - .964 = 0.036 = 3.6\%$

$0.036 \times 12 \times 100000 = 43200$ euros por receber anualmente

Problema do planeamento de grupo de trabalho

$$(I - Q)^{-1} = \begin{bmatrix} 5 & 2.5 & 10 \\ 0 & 10/3 & 40/3 \\ 0 & 0 & 20 \end{bmatrix} \quad (I - Q)^{-1}R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 1/3 & 2/3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1. em média, quantos anos é que um recém-formado fica na firma?

como recém formado ($t_1 \rightarrow t_1$): elemento (1,1) de $(I - Q)^{-1} = 5$ anos
como experiente ($t_1 \rightarrow t_2$): elemento (1,2) de $(I - Q)^{-1} = 2.5$ anos
como associado ($t_1 \rightarrow t_3$): elemento (1,3) de $(I - Q)^{-1} = 10$ anos
TOTAL: 17.5 anos

2. qual é a probabilidade de um recém-formado contratado deixar a firma antes de ser associado?

passagem de $t_1 = 1$ a $a_2 = 2$, elemento (1,2) de $(I - Q)^{-1}R = 0.5$

3. em média, quantos anos é que um associado fica na firma?

($t_3 \rightarrow t_3$) elemento (3,3) de $(I - Q)^{-1} = 20$ anos

- Noções essenciais em cadeias de Markov.
- Resolução de problemas com cadeias de Markov
 - cadeias ergódicas
 - cadeias com absorção