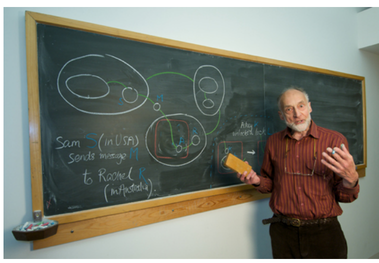
Aula 3

CCS: Calculus of Communicating Processes

https://en.wikipedia.org/wiki/Robin$_{M}ilnerRobinMilner(1934-2010)$



http://www.diffusion.ens.fr/data/audio/2007$_{1}2_{1}0_{m}ilner.mp3IsinformaticsaScience?$

CCS:Calculus of Communicating Processes

- o processo mais simples é o que não executa nenhuma ação(deadlock): 0
- Se P é um processo e a uma ação $a.P$ é um processo: que executa a e depois comporta-se como P
- Um fósforo: $strike.light.extinguish.0$
- Uma máquina de vender café: $coin.coffee.0$
- Ações internas: τ
- $strike.\tau.0$
- Se houver uma escolha $strike.(light.0 + \tau.0)$
- Dois fósforos: $strike.(light.0|\tau.0)$

Operadores do CCS

". "Prefixo a execução de $\alpha.P$ começa com a execução da ação $\alpha \in Act$ e depois comporta-se como P

"+ "Escolha O processo $P+Q$ comporta-se como o processo P ou o processo Q. É a escolha não determinística

"|"Composição Paralela O processo $P|Q$ representa a execução concorrente de P e Q (que progridem independentemente no tempo).

CCS_0 Sequencial sem recursão

Seja *Act* um conjunto de ações. O conjunto de expressões do CCS_0 são dadas pela seguinte gramática

$$P \quad ::= \quad 0 \mid P + P \mid \alpha.P$$

onde supomos as seguintes regras de prioridades

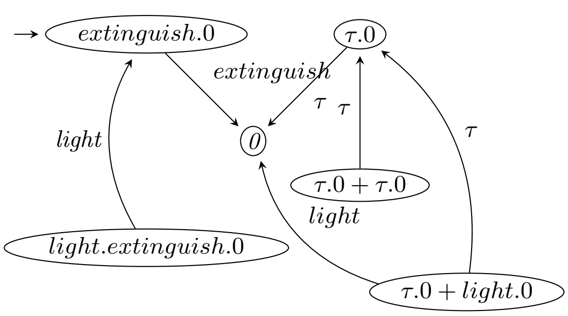
- $P + Q + R$ é $(P + Q) + R$
- $\alpha.\beta.P$ é $\alpha.(\beta.P)$
- $\alpha.P + Q$ é $(\alpha.P) + Q$
- e por vezes omitimos o 0: $\alpha.\beta$ em vez de $\alpha.\beta.0$
- Ex: $strike.(light.0 + \tau.0) \in CCS_0$

Semântica do CCS_0

O semântica duma expressão P é $[\![P]\!] = (S, \longrightarrow, s_0)$. onde:

- $S = \{Q \mid Q \in CCS_0\}$ i.e as expressões válidas do CCS_0 (que tipo de LTS será?)
- $s_0 = P$
- $\longrightarrow \in (CCS_0 \times Act \times CCS_0)$

Exemplo 3.1 (Fragmento dum LTS para um P)**.** *$Act = \{strike, light, extinguish, \tau\}$ para $[\![extinguish.0]\!]$ temos:*



Regras de Inferência

- Permitem definir um LTS cujos estados são expressões e existe uma transição $P \xrightarrow{\alpha} Q$ se esta poder ser demonstrada a partir das regras.
- Uma regra é da forma
$$\frac{P_1 \cdots P_n}{P}$$
- $P_1, \ldots, P_n$ são as *Premissas* ou Hipóteses
- P é a *Conclusão*
- Significa: se $P_1, \ldots, P_n$ se verificarem então P também se verifica (pode ser inferido)
- Se $n = 0$ então a P é um *Axioma*

Regras do CCS_0

$$\text{Prefixo}\ \frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$$

$$\text{EscolhaE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}$$

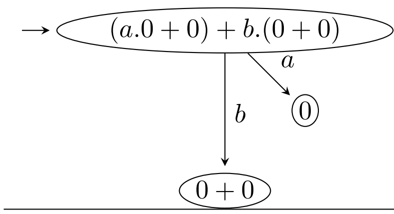
$$\text{EscolhaD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$$

Exemplo

$$[\![(a.0 + 0) + b.(0 + 0)]\!]$$

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{}{a.0 \xrightarrow{\alpha} 0}\ \text{Prefixo}}{a.0 + 0 \xrightarrow{\alpha} 0}\ \text{EscolhaE}}{(a.0 + 0) + b.(0 + 0) \xrightarrow{\alpha} 0}\ \text{EscolhaE}$$

$$\frac{b.(0 + 0) \xrightarrow{\alpha} 0 + 0}{(a.0 + 0) + b.(0 + 0) \xrightarrow{\alpha} 0 + 0}\ \text{EscolhaD}$$



Prefixo $\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$ EscolhaE $\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'}$ EscolhaD $\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$

Semântica do CCS_0 (II)

A relação $\longrightarrow$ é a menor tal que, para todo $\alpha \in Act$ e $P, Q \in CCS_0$,

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \longrightarrow$
- $(P+Q, \alpha, P') \in \longrightarrow$) se $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow$
- $(P+Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow$) se $(Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow$
- nada mais está em $\longrightarrow$

Prefixo $\frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$ EscolhaE $\frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'}$ EscolhaD $\frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$

Semântica do CCS_0 (II)

O conjunto de todos os LTS sobre expressões do CCS_0 é

$$LTS_0 = \{(CCS_0, T, P) \mid T \subseteq (CCS_0 \times Act \times CCS_0, P \in CCS_0\}$$

A semântica das expressões do CCS_0 é então

$$[\![\_]\!] : CCS_0 \to LTS_0$$

tal que

$$[\![P]\!] = (CCS_0, \longrightarrow, P)$$

com $\longrightarrow$ definida no slide anterior.

- Contudo apenas interessa um fragmento de $[\![P]\!]$
- Só interessam estados atingíveis de P
- Só interessam as acções dos estados atingíveis
- Não interessam os nomes dos estados atingíveis
- Por exemplo $\alpha.0+0$ e $0+\alpha.0$ não têm o mesmo LTS (verifica) mas são *isomorfos*.

Isomorfismo

Dois LTS $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ and $TS' = (S', \longrightarrow', s'_0)$ são isomorfos, $TS \sim TS'$, se existe uma bijeção f com

$$f : Reach(TS) \rightarrow Reach(TS')$$

com

- $f(s_0) = s'_0$
- para todos os $s_1, s_2 \in Reach(TS)$ e para toda $\alpha \in Act$

$$s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2 \quad sse \quad f(s_1) \xrightarrow{\alpha}{}' f(s_2)$$

- Dois LTSs isomorfos são indistinguíveis para um observador.

Exercício 3.1. *Mostrar que o isomorfismo de LTSs é uma relação de equivalência.* $\diamond$

Exercício 3.2. *Mostrar que um LTS que é finitamente ramificado e tem um número finito de estados é isomorfo a um LTS finito por estados.* $\diamond$

Exercício 3.3. *Mostra que dado um LTS finito TS (acíclico) existe uma expressão P do CCS_0 tal que $TS = [\![P]\!]$.* $\diamond$

http://tinyurl.com/pseucoPseuCo.com

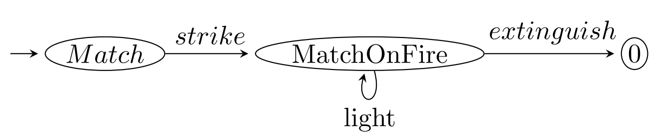
Definições Recursivas em CCS

- Usando *nomes* para sub-expressões e que podem ser usadas em expressões.
- Em vez de $strike.(light.0 + \tau.0)$

$$\begin{aligned} Match &:= strike.MatchOneZeroLight \\ MatchOneZeroLight &:= light.0 + \tau.0 \end{aligned}$$

- sendo que agora podemos representar repetição (iteração)

$$\begin{aligned} Match &:= strike.MatchOnFire \\ MatchOnFire &:= light.MatchOnFire + extinguish.0 \end{aligned}$$



- *Convenção*: nomes começam por letra maíuscula e ações por minúscula. Também são chamadas de constantes ou variáveis (?!).

CCS_0^ω : Sequencial com iteração

Seja Act um conjunto de ações e Var um conjunto de nomes (variáveis). As expressões do CCS_0^ω são

$$P \quad ::= \quad 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P$$

onde $\alpha \in Act$ e $X \in Var$. Supomos um conjunto Γ de equações $X := P$.

Exemplo 3.2. *1.* $X := a.b.X$ *e* $\Gamma = \{(X, a.b.X)\}$

2.

$$\begin{array}{rcl} X & := & a.b.Y \\ Y & := & b.Z + a.Y \\ Z & := & a.Y \end{array}$$

$\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$

Semântica do CCS_0^ω

Regras do CCS_0^ω

$$\text{Prefixo}\ \frac{}{\alpha.P \ \xrightarrow{\alpha}\ P}$$

$$\text{EscolhaE}\ \frac{P \ \xrightarrow{\alpha}\ P'}{P + Q \ \xrightarrow{\alpha}\ P'}$$

$$\text{EscolhaD}\ \frac{Q \ \xrightarrow{\alpha}\ Q'}{P + Q \ \xrightarrow{\alpha}\ Q'}$$

$$\text{Rec}\ \frac{P \ \xrightarrow{\alpha}\ P' \qquad \Gamma(X) = P}{X \ \xrightarrow{\alpha}\ P'}$$

Semântica do CCS_0^ω

A relação $\longrightarrow_\Gamma$ é a menor tal que, para todo $\alpha \in Act$ e $P, Q \in CCS_0^\omega$,

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \longrightarrow_\Gamma)$
- $(P + Q, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma)$ se $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma)$
- $(P + Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow_\Gamma)$ se $(Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow_\Gamma)$

- $(X, \alpha, P') \in \longrightarrow_{\Gamma}$ se $\Gamma(X) = P$ e $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow_{\Gamma})$
- nada mais está em $\longrightarrow_{\Gamma}$

Regra prática

Tentar aplicar as regras a um P até encontrar uma nova transição $P \xrightarrow{\alpha} P'$. E repetir para P' caso não fosse conhecido ele ou o seu comportamento.

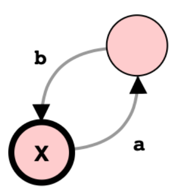
Exemplos

$[\![X]\!]_{\Gamma}$ e $\Gamma = \{\{(X, a.b.X)\}$

$$\text{Rec}\ \frac{\text{Prefixo}\ \dfrac{}{a.b.X \xrightarrow{a} b.X} \qquad \Gamma(X) = a.b.X}{X \xrightarrow{a} b.X}$$

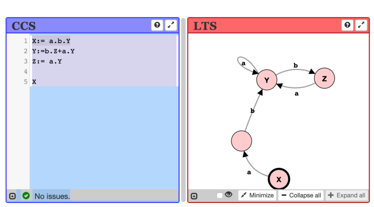
$$\text{Prefixo}\ \frac{}{b.X \xrightarrow{b} X}$$

https://pseuco.com/#/edit/local/466050346332Ex1



$[\![Y]\!]_{\gamma}$ e $\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$

https://pseuco.com/#/edit/local/403502471538Ex2



Exercício 3.4. *Determinar formalmente* $[\![Y]\!]_{\Gamma}$. $\diamond$

Exemplos

$[\![X]\!]_{\Gamma}$ e $\Gamma = \{(X, 0 + Y), (Y, a.X)\}$

$$\text{Rec}\,\dfrac{\text{EscolhaD}\,\dfrac{\text{Rec}\,\dfrac{\text{Prefixo}\,\dfrac{}{a.X \xrightarrow{a} X} \qquad \Gamma(Y)=a.X}{Y \xrightarrow{a} X}}{0+Y \xrightarrow{a} X} \qquad \Gamma(X)=0+Y}{X \xrightarrow{a} X}$$

Desenha o LTS $[\![X]\!]_\Gamma$ e $[\![Y]\!]_\Gamma$

https://pseuco.com/#/edit/local/466050346332Ex3

Exemplos

Como calcular:

- $[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, X)\}$
- $[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, X + a.0)\}$
- $[\![X_0]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X_i, a.X_{i+1}) \mid i \geq 1\}$

Expressões guardadas

- Uma variável X é *guardada* na expressão P se cada ocorrência de X em P ocorre numa expressão $\alpha.Q$
- caso contrário *não é guardada*
- Uma expressão é guardada se todas as suas variáveis são guardadas
- caso contrário *não é guardada*
- Ex. não guardadas: X, $a.0 + X$, $\tau.X + Y$, $a.X + Y$
- Ex. guardadas: $a.X$, $a.(X + Y)$, $\tau.X + a.Y$, $a(X + b.Y)$
- Se $P \in CCS_0^\omega$ é guardada e os valores de Γ são guardados, é possível calcular $[\![P]\!]_\Gamma$ pela regra prática, isto é o processo termina.

Semântica do CCS Sequencial (III)

$$LTS_0^\omega = \{(CCS_0^\omega, T, P) \mid T \subseteq (CCS_0^\omega \times Act \times CCS_0^\omega, P \in CCS_0^\omega\}$$

Conjunto de todos os LTS sobre expressões do CCS_0^ω com um conjunto de variáveis Var. A semântica das expressões do CCS_0^ω é então

$$[\![\_]\!] : (Var \to CCS_0^\omega) \to CCS_0^\omega \to LTS_0^\omega$$

tal que

$$[\![P]\!]_\Gamma = (CCS_0^\omega, \longrightarrow_\Gamma, P)$$

com $\longrightarrow_\Gamma$ definida anteriormente.

Exercícios

Exercício 3.5. *Mostrar que para cada LTS estados-finito existe uma expressão* $P \in CCS_0^{\omega}$ *tal que* $TS \sim [\![P]\!]_{\Gamma}$. $\diamond$