Aula 6

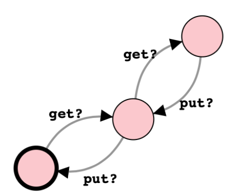
Bisimulação fraca e Congruência Observável

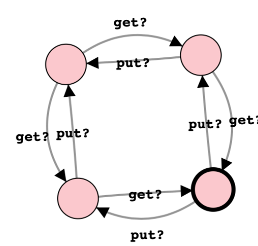
$2 - Buffer$

$$Buffer \quad := \quad put?.get?.Buffer$$

$$\begin{aligned} Buffer0 \quad &:= \quad put?.Buffer1 \\ Buffer1 \quad &:= \quad put?.Buffer2 + get?.Buffer0 \\ Buffer2 \quad &:= \quad get?.Buffer1 \end{aligned}$$

Será que $Buffer0 \sim (Buffer|Buffer)$?

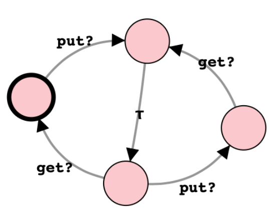


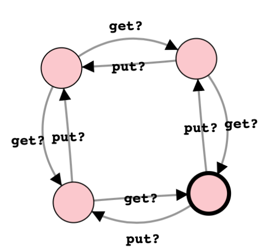


e

$$\begin{aligned} BufferL \quad &:= \quad put?.pass!.BufferL \\ BufferR \quad &:= \quad pass?.get?.BufferR \end{aligned}$$

Será que
$(BufferL|BufferR)\backslash\{pass!, pass?\} \sim (Buffer|Buffer)$?





Bisimulação Fraca

Ignora transições por τ. Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$. Uma relação $R \in S \times S$ é uma *bisimulação fraca* se $(s,t) \in R$ (ou $s\ R\ t$) implica para todo $\alpha \in Act$:

- se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \overset{\alpha}{\Rightarrow} t'$ e $(s', t') \in R$
- se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \overset{\alpha}{\Rightarrow} s'$ e $(s', t') \in R$.

Onde

Transições fracas

- $s \overset{\tau}{\Rightarrow} s'$ sse $\exists n \geq 0 : s \overset{\tau^n}{\rightsquigarrow} s'$
- $s \overset{a}{\Rightarrow} s'$ sse $\exists s'', s''' \in S : s \overset{\tau}{\Rightarrow} s'' \xrightarrow{a} s''' \overset{\tau}{\Rightarrow} s'$

Nota que $\longrightarrow \subseteq \Rightarrow$ e na definição de b.f. podemos usar sempre $\Rightarrow$.

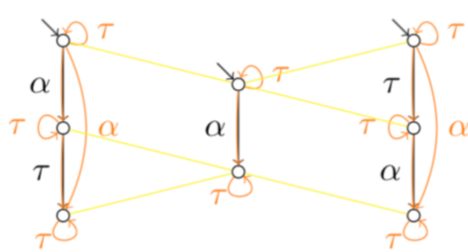
Bisimilaridade fraca

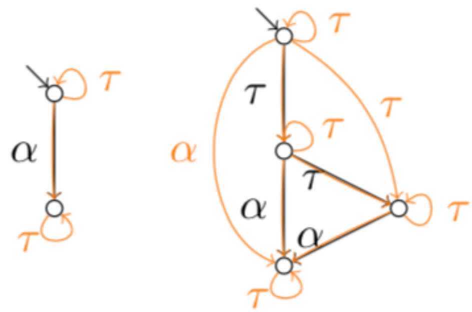
Dois estados s e t são *fracamente bisimilares*, e escreve-se $s \approx t$, se existe uma bisimulação fraca R que contêm (s,t), i.e $(s,t) \in R$.

Exemplo

Mostrar que

- $a.\tau.0 \approx a.0 \approx \tau.a.0$
- $\tau(a.0 + \tau.a.0) \approx a.0$



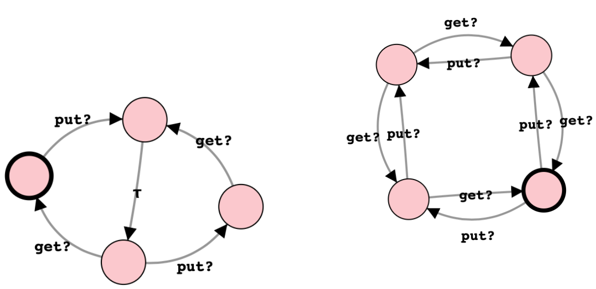


Exemplo dos Buffers

$$Buffer \quad := \quad put?.get?.Buffer$$

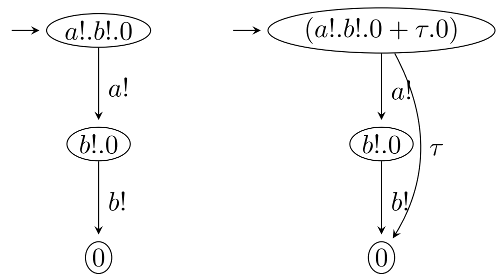
$$\begin{aligned} BufferL \quad &:= \quad put?.pass!.BufferL \\ BufferR \quad &:= \quad pass?.get?.BufferR \end{aligned}$$

$(BufferL|BufferR)\backslash\{pass!, pass?\} \approx (Buffer|Buffer)$



Não são fracamente bisimilares

$$(a!.b!.0) \not\approx (a!.b!.0 + \tau.0)$$



- A: $a!.(b!.0 + \tau.0) \xrightarrow{\tau} 0$
- D: $a!.b!.0 \overset{\tau}{\Rightarrow} a!.b!.0$
- A: $a!.b!.0 \xrightarrow{a!} b!.0$
- D: não pode jogar com $a!$ porque 0 não tem transição fraca com $a!$.

Propriedades de $\approx$

$$\approx = \bigcup_{\text{R é bisimulação fraca}} R$$

Teorema 6.1. *A relação $\approx$ é de equivalência.*

Notar que se R é uma bisimulação fraca R^{-1} também é.

Teorema 6.2. *A relação $\approx$ é maior bisimulação fraca .*

Mostrar que $\approx$ é uma bisimulação fraca.

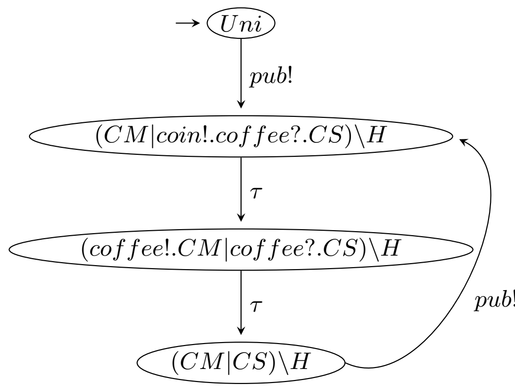
Teorema 6.3. *A bisimilaridade fraca é estritamente mais grosseira que a bisimilaridade forte, i.e $\sim \subsetneq \approx$.*

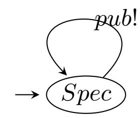
Cada bisimulação forte é uma bisimulação fraca. E vimos exemplos de processos que não bisimilares fortes mas que são bisimilares fracos.

Será que $Spec \approx Uni$?

Seja $Spec := pub!.Spec$ e

$$\begin{aligned} CM &:= coin?.coffee!.CM \\ CS &:= pub!.coin!.coffee?.CS \\ Uni &:= (CM|CS)\backslash\{coin, coffee\} \end{aligned}$$





Será que $Uni \approx Unibad$?

Seja

$$
\begin{array}{rcl}
CM & := & coin?.coffee!.CM \\
CMB & := & coin?.coffee!.CMB + coin?.CMB \\
CS & := & pub!.coin!.coffee?.CS \\
Uni & := & (CM|CS)\backslash\{coin, coffee\} \\
UniBad & := & (CMB|CS)\backslash\{coin, cofee\}
\end{array}
$$

A Bisimilaridade Fraca não é uma Congruência

Para todo $P, Q \in CCS$ se $P \approx Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

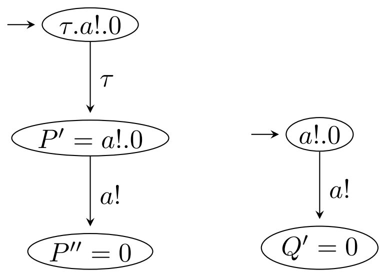
$$
\begin{array}{rcl}
\alpha.P & \approx & \alpha.Q \\
P|R & \approx & Q|R \\
R|P & \approx & R|Q \\
P\backslash H & \approx & Q\backslash H
\end{array}
$$

mas não implica que

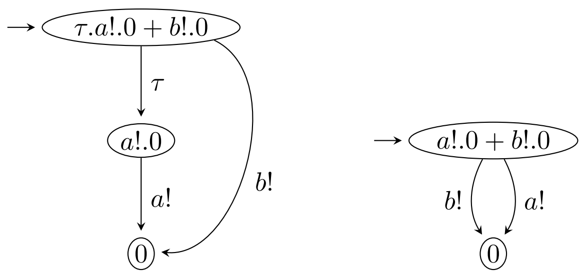
$$
\begin{array}{rcl}
P + R & \approx & Q + R \\
R + P & \approx & R + Q
\end{array}
$$

Contraexemplo: $P = \tau.a!.0$, $Q = a!.0$ e $R = b!.0$.

- Mostrar que $P \approx Q$ considerando a relação $\mathcal{R} = \{(P, Q), (P', Q), (P'', Q')\}$ onde $P' = a.0$ e $P'' = Q' = 0$ (mas em sistemas diferentes).



- Mostrar que $P + R \not\approx Q + R$.



- A: $\tau.a!.0 + b!.0 \xrightarrow{\tau} a!.0$
- D: $a!.0 + b!.0 \overset{\tau}{\Rightarrow} a!.0 + b!.0$
- A: $a!.0 + b!.0 \xrightarrow{b!} 0$
- D: não pode jogar porque não há nenhuma transição fraca de $a!.0$ por $b!$

O problema está nos processos não guardados!

Impondo a congruência do +

Congruência para a Escolha

Dois processos $P, Q \in CCS$ são *congruentes para a escolha*, e escreve-se $P \approx^+ Q$ sse para todos os $R \in CCS$

$$P + R \approx Q + R$$

.

Pode-se provar que

- $\approx^+ \subsetneq \approx$ (tomando $R = 0$)
- $\approx^+$ é uma congruência e é a mais grosseira contida em $\approx$

Embora seja esta a noção de igualdade de processos que se pretende, não é fácil de usar por causa de *para todos os $R \in CCS$*. Vamos ver uma definição que é equivalente mas mais perto das outras definições de bisimulação.

Congruência Observável

Congruência Observável

Dois processos $P, Q \in CCS$ são congruentes para a observação, e escreve-se $P \simeq Q$ sse para todos $\alpha \in Act$ verifica-se que:

- se $P \xrightarrow{\alpha} P'$ então existe Q' tal que $Q \overset{\tau}{\Rightarrow} \xrightarrow{\alpha} \overset{\tau}{\Rightarrow} Q'$ e $P' \approx Q'$.
- se $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ então existe P' tal que $P \overset{\tau}{\Rightarrow} \xrightarrow{\alpha} \overset{\tau}{\Rightarrow} P'$ e $P' \approx Q'$.

A diferença entre $\approx$ e $\simeq$ está que os passos internos iniciais não podem ser simulados por não haver movimento.

Teorema 6.4. *Para todos os $P, Q \in CCS$ $P \simeq Q$ sse $P \approx^+ Q$.*

Exemplos

- $\tau.a \not\simeq a$
- $P|\tau.Q \not\simeq \tau.(P|Q)$

Igualdade de comportamento

- Dois processos $P, Q \in CCS$ *tem o mesmo comportamento* sempre que $P \simeq Q$.
- É chamada a *igualdade de comportamento*
- as propriedades pretendidas:
  - relação de equivalência
  - relação de congruência
  - ter o mesmo conjunto de traços *fracos*
  - seja sensível a deadlocks
- $\sim \subsetneq \simeq \subseteq \approx$
- em vez de $\simeq$ usa-se $=$.

Regras algébricas de $=$

Para além das satisfeitas por $\sim$ temos

$$\begin{aligned} \alpha.\tau.P &= \alpha.P \\ P + \tau.P &= \tau.P \\ \alpha.(P + \tau.Q) &= \alpha.(P + \tau.Q) + \alpha.Q \end{aligned}$$

Nota: as regras algébricas permitem provar a igualdade de processos pela aplicação das regras (em especial em CCS_0) ou considerá-las axiomas num sistema de dedução.

Representantes Minimais

- Para cada LTS podemos considerar o *representante minimal* o menor LTS cujo comportamento é igual ao LTS dado.
- O representante minimal é único a menos de isomorfismo se for estados-finito.
- É obtido pelo quociente induzido pela relação de equivalência ($\simeq$).
- cada classe de equivalência é um estado

Como obter o representante minimal

Dado um processo P do CCS estados-finito:

- Construir o LTS atíngivel de P.
- Calcular a relação $\approx$
- Considerar cada classe de equivalência um estado: $S = \{[s]_{\simeq} \mid s \in Reach(P)\}$
- Adicionar transições entre duas classe sempre que uma transição exista entre os elementos da respectiva classe.
- Podemos apagar as transições que seriam adicionadas por $\Rightarrow$ e não estavam em $\longrightarrow$.
- Adicionar um lacete com τ se P tem um a τ-transição para a sua classe $[P]_{\approx}$.

$2 - Buffer$

$$Buffer \quad := \quad put?.get?.Buffer$$

$$\begin{aligned} BufferL \quad &:= \quad put?.pass!.BufferL \\ BufferR \quad &:= \quad pass?.get?.BufferR \end{aligned}$$