Aula 4

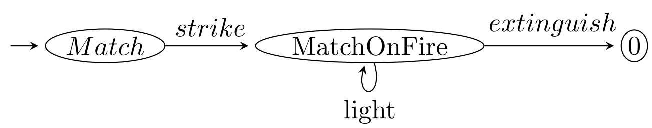
Definições Recursivas em CCS

- Usando *nomes* para sub-expressões e que podem ser usadas em expressões.
- Em vez de $strike.(light.0 + \tau.0)$

$$\begin{aligned} Match &:= strike.MatchOneZeroLight \\ MatchOneZeroLight &:= light.0 + \tau.0 \end{aligned}$$

- sendo que agora podemos representar repetição (iteração)

$$\begin{aligned} Match &:= strike.MatchOnFire \\ MatchOnFire &:= light.MatchOnFire + extinguish.0 \end{aligned}$$



- *Convenção*: nomes começam por letra maiúscula e ações por minúscula. Também são chamadas de constantes ou variáveis (?!).

CCS_0^ω : Sequencial com iteração

Seja Act um conjunto de ações e Var um conjunto de nomes (variáveis). As expressões do CCS_0^ω são

$$P \quad ::= \quad 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P$$

onde

- $\alpha \in Act$,
- $X \in Var$ e
- um conjunto Γ de equações da forma $X := P$, representados por pares (X, P)

  $$\Gamma = \{(X_1, P_1), \ldots, (X_n, P_n)\}$$

  e

  $$\Gamma(X_i) = P_i$$

Exemplo 4.1. 1. *$X := a.b.X$ então temos $\Gamma = \{(X, a.b.X)\}$*

2. *Se*

$$\begin{aligned} X &:= a.b.Y \\ Y &:= b.Z + a.Y \\ Z &:= a.Y \end{aligned}$$

temos $\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$

Semântica do CCS_0^ω

Regras do CCS_0^ω

$$\text{Prefixo}\ \frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$$

$$\text{EscolhaE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'}$$

$$\text{EscolhaD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$$

$$\text{Rec}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \Gamma(X) = P}{X \xrightarrow{\alpha} P'}$$

Semântica do CCS_0^ω

A relação $\longrightarrow_\Gamma$ é a menor tal que, para todo $\alpha \in Act$ e $P, Q \in CCS_0^\omega$,

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \longrightarrow_\Gamma$
- $(P+Q, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma)$ se $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma)$
- $(P+Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow_\Gamma)$ se $(Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow_\Gamma)$
- $(X, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma$ *se* $\Gamma(X) = P$ *e* $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow_\Gamma$
- nada mais está em $\longrightarrow_\Gamma$

Regra prática

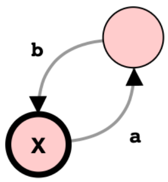
Tentar aplicar as regras a um P até encontrar uma nova transição $P \xrightarrow{\alpha} P'$. E repetir para P' caso não fosse conhecido ele ou o seu comportamento.

Exemplos

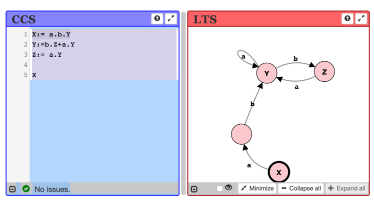
$[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{\{(X, a.b.X)\}$

$$\text{Rec}\ \frac{\text{Prefixo}\ \dfrac{}{a.b.X \xrightarrow{a} b.X} \qquad \Gamma(X) = a.b.X}{X \xrightarrow{a} b.X}$$

$$\text{Prefixo}\ \frac{}{b.X \xrightarrow{b} X}$$



$[\![Y]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, a.b.Y), (Y, b.Z + a.Y), (Z, a.Y)\}$



Exercício 4.1. *Determinar formalmente* $[\![Y]\!]_\Gamma$. $\diamond$

Exemplos

$[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, 0 + Y), (Y, a.X)\}$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a.X \xrightarrow{a} X}\,\text{Prefixo} \qquad \Gamma(Y) = a.X}{Y \xrightarrow{a} X}\,\text{Rec}}{0 + Y \xrightarrow{a} X}\,\text{EscolhaD} \qquad \Gamma(X) = 0 + Y}{X \xrightarrow{a} X}\,\text{Rec}$$

Desenha o LTS $[\![X]\!]_\Gamma$ e $[\![Y]\!]_\Gamma$

Exemplos

Como calcular:

- $[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, X)\}$
- $[\![X]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X, X + a.0)\}$
- $[\![X_0]\!]_\Gamma$ e $\Gamma = \{(X_i, a.X_{i+1}) \mid i \geq 1\}$

Expressões guardadas

- Uma variável X é *guardada* na expressão P se cada ocorrência de X em P ocorre numa expressão $\alpha.Q$

- caso contrário *não é guardada*
- Uma expressão é guardada se todas as suas variáveis são guardadas
- caso contrário *não é guardada*
- Ex. não guardadas: X, $a.0 + X$, $\tau.X + Y$, $a.X + Y$
- Ex. guardadas: $a.X$, $a.(X + Y)$, $\tau.X + a.Y$, $a(X + b.Y)$
- Se $P \in CCS_0^\omega$ é guardada e os valores de Γ são guardados, é possível calcular $[\![P]\!]_\Gamma$ pela regra prática, isto é o processo termina.
- No pseuco.com só expressões guardadas

Semântica do CCS Sequencial (III)

$$LTS_0^\omega = \{(CCS_0^\omega, T, P) \mid T \subseteq (CCS_0^\omega \times Act \times CCS_0^\omega, P \in CCS_0^\omega\}$$

Conjunto de todos os LTS sobre expressões do CCS_0^ω com um conjunto de variáveis Var. A semântica das expressões do CCS_0^ω é então

$$[\![\_]\!] : (Var \to CCS_0^\omega) \to CCS_0^\omega \to LTS_0^\omega$$

tal que

$$[\![P]\!]_\Gamma = (CCS_0^\omega, \longrightarrow_\Gamma, P)$$

com $\longrightarrow_\Gamma$ definida anteriormente.

Exercício 4.2. *Mostrar que para cada LTS estados-finito existe uma expressão $P \in CCS_0^\omega$ tal que $TS \sim [\![P]\!]_\Gamma$.* $\diamond$

Exemplo de $1 - Buffer$

$$Buffer \quad := \quad put?.get?.Buffer$$

Calcula $[\![Buffer]\!]_\Gamma$.

$$BufferM \quad := \quad put?.get?.BufferM + get?.put?.BufferM$$

Calcula $[\![put?.BufferM]\!]_\Gamma$.

$$\begin{aligned} Buffer0 &:= put?.Buffer1 \\ Buffer1 &:= get?.Buffer2 + get?.Buffer0 \\ Buffer2 &:= get?.Buffer1 \end{aligned}$$

Calcula $[\![Buffer0]\!]_\Gamma$.

Operadores do CCS

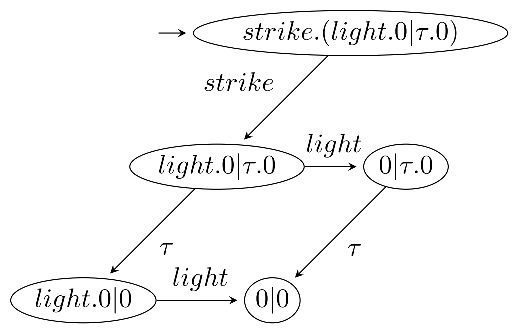
". "Prefixo a execução de $\alpha.P$ começa com a execução da ação $\alpha \in Act$ e depois comporta-se como P

"+ "Escolha O processo $P+Q$ comporta-se como o processo P ou o processo Q. É a escolha não determinística

"| "*Composição Paralela* O processo $P|Q$ representa a execução concorrente de P e Q (que progridem independentemente no tempo).

Paralelismo

Dois fósforos: $strike.(light.0|\tau.0)$



As ações são instantaneas

Regras de inferência Par

$$\text{ParE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}$$

$$\text{ParD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'}$$

Sincronia em CCS

- O conjunto de ações observáveis Com é dividido em dois
- $Com = A^! \cup A^?$
- $A^!$ conjunto de ações de saída (*envio*)
- $A^?$ conjunto de ações de entrada (*recebidas*)

- Ações com o mesmo nome formam um par e são complementares:
- um processo envia $a^!$ e e outro recebe $a^?$
- O complemento de $a \in A^! \cup A^?$ designa-se por $\overline{a}$: se $a \in A^!$ então $\overline{a} \in A^?$ e vice-versa.
- Para a ação interna τ, temos $\tau = \overline{\tau}$.
- $\forall \alpha \in Act, \overline{\overline{\alpha}} = \alpha$.

Regra de inferência de Sincronia

$$\frac{P \xrightarrow{a} P' \qquad Q \xrightarrow{\overline{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\cdots} P'|Q'}$$

A sincronização não é observável por processos externos A ação interna τ representa a sincronização para o exterior

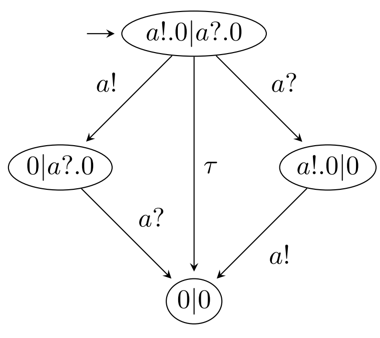
$$\text{Sync}\ \frac{P \xrightarrow{a} P' \qquad Q \xrightarrow{\overline{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

$$\text{ParE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}$$

$$\text{ParD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'}$$

Exemplo

$(a!.0|a?.0)$



A regra Sync não exclui a utilização de ParD e ParE

Operador de Restrição

- Proibe que pares de ações observáveis (a e $\overline{a}$) sejam usadas (individualmente)
- Força a sincronia
- $P \backslash H$ onde P é um processo e H um conjunto de ações de comunicação que serão proibidas
- As ações internas τ não podem estar em H

$$\text{Res}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin H}{P\backslash H \xrightarrow{\alpha} P'\backslash H}$$

Exemplo de Restrição

$$((a!.0|a!.0)|a?.0)\backslash\{a!, a?\} \xrightarrow{\tau} ((a!.0|0)|0)\backslash\{a!, a?\}$$

$$((a!.0|a!.0)|a?.0)\backslash\{a!, a?\} \xrightarrow{\tau} ((0|a!.0)|0)\backslash\{a!, a?\}$$

$$\text{ParE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}$$

$$\text{Res}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin H}{P\backslash H \xrightarrow{\alpha} P'\backslash H}$$

$$\text{ParD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'}$$

In PseuCo

$$\begin{aligned} Match &:= strike.MatchOnFire \\ MatchOnFire &:= light!.MatchOnFire + extinguish!.0 \\ TwoFireCracker &:= light?.(bang!.0|bang!.0) \end{aligned}$$

$$(Match|TwoFireCracker)\backslash\{light\}$$

CCS (quase) completo

Seja $Com = A^! \cup A^?$ conjunto de ações de comunicação, $Act = Com \cup \{\tau\}$ um conjunto de ações, e Var um conjunto de nomes (variáveis). As expressões do CCS são

$$P \quad ::= \quad 0 \mid X \mid P + P \mid \alpha.P \mid P|P \mid P\backslash H$$

onde $\alpha \in Act$, $X \in Var$ e $H \subseteq Com$. Supomos um conjunto Γ de equações $X := P$.

Semântica do CCS

A semântica das expressões do CCS é então

$$[\![\_]\!] : (Var \to CCS) \to CCS \to LTS_{CCS}$$

tal que

$$[\![P]\!]_\Gamma = (CCS, \longrightarrow_\Gamma, P)$$

com

$$LTS_{CCS} = \{(CCS, T, s) \mid T \subseteq CCS \times Act \times CCS, \wedge s \in CCS\}$$

onde $\longrightarrow_\Gamma$ a mais pequena relação que satisfaz as regras de inferência.

$$\text{Pref}\ \frac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$$

$$\text{ParE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q}$$

$$\text{EscD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$$

$$\text{EscE}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}$$

$$\text{Sync}\ \frac{P \xrightarrow{a} P' \qquad Q \xrightarrow{\overline{a}} Q'}{P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'}$$

$$\text{ParD}\ \frac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P|Q \xrightarrow{\alpha} P|Q'}$$

$$\text{Res}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \alpha \notin H}{P\backslash H \xrightarrow{\alpha} P'\backslash H}$$

$$\text{Rec}\ \frac{P \xrightarrow{\alpha} P' \qquad \Gamma(X) = P}{X \xrightarrow{\alpha} P'}$$