Programação Concorrente - Exercícios 4

Isomorfismo, Equivalência de Traços e Bissimulação Forte

Consultar os Capitulo 3-1-3,3 e 3.5 de [1].

1. Sendo

$$\begin{array}{rcl} P & := & a!.0 + b!.0 \\ Q & := & b!.0 + a!.0 \end{array}$$

   será que se verificam as seguintes relações

$$\begin{array}{rcl} P & \sim_{tr} & Q \\ a!.P & \sim_{tr} & a!.Q \\ a!.P + a!.P & \sim_{tr} & a!.Q + a!.Q \end{array}$$

   e o mesmo para $\sim_{iso}$?

   Solution: Sim para ambas as relações.

2. Mostra que $(b!.0 + c!.0) \sim_{iso} (c!.0 + b!.0)$ mas $a!.(b!.0 + c!0) + a!.(b!.0 + c!0) \not\sim_{iso} a!.(b!.0 + c!0) + a!.(c!.0 + b!.0)$ e conclui que $\sim_{iso}$ não é uma congruência.

3. Mostra que para qualquer $P, Q, R \in CCS$

$$\begin{array}{rcl} P + Q & \sim_{tr} & Q + P \\ (P + Q) + R & \sim_{tr} & P + (Q + R) \\ P + 0 & \sim_{tr} & P, \end{array}$$

   e $\alpha.(P + Q) \sim_{tr} \alpha.P + \alpha.Q$.

4. Sendo

$$\begin{array}{rcl} CTM & := & coin?.(coffee!.CTM + tea!.CTM) \\ CTM' & := & coin?.coffee!.CTM' + coin?.tea!.CTM' \end{array}$$

   Mostra que $CTM \sim_{tr} CTM'$.

5. Resolver os exercícios de bissimulação em `http://tinyurl.com/pseuco`

6. Mostra as seguintes propriedades da relação de bissimilaridade $\sim$
   (a) $\sim$ é uma relação de equivalência.

Solution: Para mostrar que é reflexiva basta mostrar que a identidade $Id = \{(P, P) \mid P \in\}$ é uma bissimulação: Se $(P, P) \in Id$ e existe $\alpha \in Act$ tal que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ então também $P \xrightarrow{\alpha} P'$ e $(P', P') \in Id$. Então $Id \subseteq\sim$, logo $\sim$ é reflexiva. Para a simetria, se $s_1 \sim s_2$ então existe uma bissimulação R tal que $(s_1, s_2) \in R$. Seja $R^{-1} = \{(s', s) \mid (s, s') \in R\}$. Então $(s_2, s_1) \in R^{-1}$ e R^{-1} é uma bissimulação: se $s_2 \xrightarrow{\alpha} s_2'$ sei que existe $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_1'$ com $(s_1', s_2') \in R$, logo $(s_2', s_1') \in R^{-1}$. O mesmo se $s_1 \xrightarrow{\alpha} s_1'$. Para a transitividade seja $s_1 \sim s_2$ e $s_2 \sim s_3$. Temos que mostrar que $s_2 \sim s_3$ Sabemos que existem duas bissimulações R e R' tal que $(s_1, s_2) \in R$ e $(s_2, s_3) \in R'$. Seja

$$S = \{(s_1', s_3') \mid (s_1', s_2') \in R \wedge (s_2', s_3') \in R'\}.$$

Temos que $(s_1, s_3) \in S$ e S é uma bissimulação: se $(s, t) \in S$ então existe w tal que $(s, w) \in R$ e $(w, t) \in R'$. Seja $s \xrightarrow{\alpha} s'$, então existe $w \xrightarrow{\alpha} w'$ tal que $(s', w') \in R$ e $t \xrightarrow{\alpha} t'$, tal que $(w', t') \in R'$. Logo $(s', t') \in S$ como queriamos. O mesmo acontece se tivermos/começarmos com $t \xrightarrow{\alpha} t'$.

(b) $\sim$ é maior bissimulação.

Solution: Por definição $\sim$ é a reunião de todas as bissimulações. Temos de mostrar que essa reunião é uma bissimulação. Pela simetria basta mostrar uma das condições. Seja $(s, t) \in \bigcup\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ e $s \xrightarrow{\alpha} s'$. Então existe uma bissimulação R_1 tal que $(s, t) \in R_1$ e um t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $(s', t') \in R_1 \subseteq \bigcup\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$. Logo $\{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ é uma bissimulação.

(c) $s \sim t$ se e só se para cada $\alpha \in Act$

- Se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$
- Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $s' \sim t'$.

7. Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1} \mid i \geq 1\} \cup \{(t, t)\}$.

   Mostrar que $s_1 \sim t$ provando que $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ é uma bissimulação.

8. Considera os processos P e Q definidos por

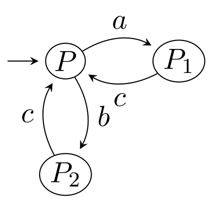
$$\begin{aligned} P &:= a.P_1 + b.P_2 \\ P_1 &:= c.P \\ P_2 &:= c.P \end{aligned}$$

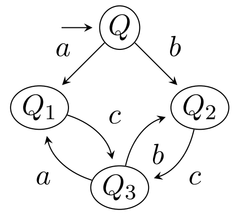
e

$$\begin{aligned} Q &:= a.Q_1 + b.Q_2 \\ Q_1 &:= c.Q_3 \\ Q_2 &:= c.Q_3 \\ Q_3 &:= a.Q_1 + b.Q_2 \end{aligned}$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q). Desenha os sistemas de transição correspondentes e testa no pseuCo.com.

Solution: Temos os seguintes LTSs para P e Q, respectivamente.





Para que $P \sim Q$ tem de existir uma bissimulação (forte) R que contenha o par (P, Q) A seguinte tabela mostra a construção duma bissimulação R. PAra cada par apenas é necessário considerar as ações do primeiro elemento do par dado os LTSs serem determinísticos. As marcas (x) indicam que chegamos a um par que já está em R (na primeira coluna).

R	Acções
(P, Q)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q \xrightarrow{a} Q_1$
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q \xrightarrow{b} Q_2$
(P_1, Q_1)	$P_1 \xrightarrow{c} P$ e $Q_1 \xrightarrow{c} Q_2$
(P_2, Q_2)	$P_2 \xrightarrow{c} P$ e $Q_2 \xrightarrow{c} Q_3$
(P, Q_2)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q \xrightarrow{a} Q_1$ (x)
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q \xrightarrow{b} Q_2$ (x)
(P, Q_3)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $_3 \xrightarrow{a} Q_1$ (x)
	$P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q_3 \xrightarrow{a} Q_2$ (x)

Temos que a bissimulação $R = \{P, Q), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P, Q_2), (P, Q_3)\}$.

9. Considera os processos P e Q definidos por

$$\begin{array}{rcl} P & := & a.P_1 \\ P_1 & := & b.P + c.P \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} Q & := & a.Q_1 \\ Q_1 & := & b.Q_2 + c.Q \\ Q_2 & := & a.Q_3 \\ Q_3 & := & b.Q + c.Q_2 \end{array}$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q).

10. Mostra que se $P \sim Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

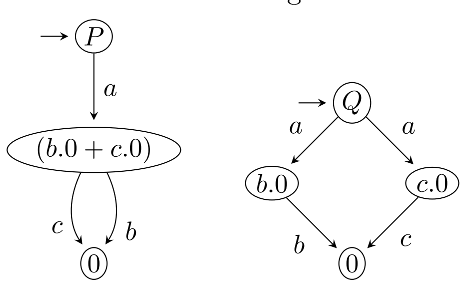
$$\begin{array}{rcl} \alpha.P & \sim & \alpha.Q \\ P + R & \sim & Q + R \\ R + P & \sim & R + Q \\ P|R & \sim & Q|R \\ R|P & \sim & R|Q \\ P\backslash H & \sim & Q\backslash H \end{array}$$

11. Considera os processos

$$\begin{array}{rcl} P & := & a.(b.0 + c.0) \\ Q & := & a.b.0 + a.c.0 \end{array}$$

Mostra que P e Q não são fortemente bissimilares.

Solution: Temos os seguintes LTSs



e os seguinte jogo de bissimulação forte enter um atacante (A), que quer mostrar que P e Q não são bissimilares e um defesa (D) que pretende mostrar que são (obtendo um bissimulação) (ver definição):

- A: $P) \xrightarrow{a} (b.0 + c.0)$
- D: $Q \xrightarrow{a} b.0$
- A: $b.0 + c.0 \xrightarrow{c} 0$
- D não pode jogar, logo , perde e concluímos que $P \not\sim Q$.

12. Mostrar que

$$\begin{array}{rcl} P + Q & \sim & Q + P \\ P + 0 & \sim & P \\ (P + Q) + R & \sim & P + (Q + R) \end{array}$$

Solution: Ver Teorema 7.5 das aulas téoricas. E também [1].

13. Mostrar que para qualquer $P, Q, R \in CCS$,

$$\begin{array}{rcl} P|Q & \sim & Q|P \\ P|0 & \sim & P \\ (P|Q)|R & \sim & P|(Q|R) \end{array}$$

Nota: começa por mostrar que as seguintes relações são bissimulações fortes:

$$\begin{array}{l} \{(P|Q, Q|P) \mid P, Q \in CCS\}, \\ \{(P|0, P) \mid P \in CCS\}, \\ \{((P|Q)|R, P|(Q|R)) \mid P, Q, R \in CCS\}. \end{array}$$

14. o a seguinte especificação de um contador:

$$\begin{array}{rcl} C_0 & := & inc.C_1 \\ C_n & := & inc.C_{n+1} + dec.C_{n-1}, \text{ para } n \geq 1 \end{array}$$

e considera o processo $C := inc.(C|dec.0)$. Mostra que a seguinte relação é uma bissimulação.

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{R} & = & \{(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \mid k \geq 0 \wedge (P_i = 0 \vee P_i = dec.0) \\ & & \wedge \text{ o número de } is \text{ com } P_i = dec.0 \text{ é n}\} \end{array}$$

Nota: Supõe $(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \in \mathcal{R}$. mostra que

1. se $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ existe Q tal que $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.
2. se $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ existe P tal que $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

15. Considera a especificação de um buffer com capacidade 1.

$$B \; := \; put?.get?.B$$

Para $n \geq 1$ podemos iterativamente definir um buffer de capacidade n, onde B_i^n indica um buffer de capacidade n com $0 \leq i \leq n$ elementos.

$$\begin{array}{rcl} B_0^n & := & put?.B_1^n \\ B_i^n & := & put?.B_{i+1}^n + get?.B_{i-1}^n, \;\; 0 < i < n \\ B_n^n & := & get?.B_{n-1}^n \end{array}$$

(a) Verifica que $B \sim_{iso} B_0^1$ (desenha os seus diagramas).

(b) Verifica que $B_0^2 \sim B_0^1|B_0^1$ (desenha os seus diagramas).

(c) Mostra que para $n \geq 1$, $B_0^n \sim \underbrace{B_0^1|B_0^1|\ldots|B_0^1}$.

Nota: mostrar que a seguinte relação é uma bissimulação

$$\mathcal{R} \quad = \quad \{(B_i^n, B_{i_1}^1|B_{i_2}^1|\ldots|B_{i_n}^1) \mid i_j \in \{0,1\} \wedge \sum_{j=1}^{n} i_j = i\}$$

Referências

[1] Luca Aceto, Anna Ingólfsdóttir, and Kim Larsen. *Reactive Systems: Modeling, Specification and Verification*. CUP, 2007.