Programação Concorrente - Exercícios 4

Isomorfismo, Equivalência de Traços e Bissimulação Forte

1. Sendo

$$\begin{aligned} P &:= a!.0 + b!.0 \\ Q &:= b!.0 + a!.0 \end{aligned}$$

   será que se verificam as seguintes relações

$$\begin{aligned} P &\sim_{tr} Q \\ a!.P &\sim_{tr} a!.Q \\ a!.P + a!.P &\sim_{tr} a!.Q + a!.Q \end{aligned}$$

   e o mesmo para $\sim_{iso}$?

2. Mostra que $(b!.0 + c!.0) \sim_{iso} (c!.0 + b!.0)$ mas $a!.(b!.0 + c!0) + a!.(b!.0 + c!0) \not\sim_{iso} a!.(b!.0 + c!0) + a!.(c!.0 + b!.0)$ e conclui que $\sim_{iso}$ não é uma congruência.

3. Mostra que para qualquer $P, Q, R \in CCS$

$$\begin{aligned} P + Q &\sim_{tr} Q + P \\ (P + Q) + R &\sim_{tr} P + (Q + R) \\ P + 0 &\sim_{tr} P, \end{aligned}$$

   e $\alpha.(P + Q) \sim_{tr} \alpha.P + \alpha.Q$.

4. Sendo

$$\begin{aligned} CTM &:= coin?.(coffee!.CTM + tea!.CTM) \\ CTM' &:= coin?.coffee!.CTM' + coin?.tea!.CTM' \end{aligned}$$

   Mostra que $CTM \sim_{tr} CTM'$.

5. Resolver os exercícios de bissimulação em `http://tinyurl.com/pseuco`

6. Mostra as seguintes propriedades da relação de bissimilaridade $\sim$
   (a) $\sim$ é uma relação de equivalência.
   (b) $\sim$ é maior bissimulação.
   (c) $s \sim t$ se e só se para cada $\alpha \in Act$
      - Se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$
      - Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $s' \sim t'$.

7. Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1} \mid i \geq 1\} \cup \{(t,t)\}$.

   Mostrar que $s_1 \sim t$ provando que $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ é uma bissimulação.

8. Considera os processos P e Q definidos por

$$\begin{aligned} P &:= a.P_1 + b.P_2 \\ P_1 &:= c.P \\ P_2 &:= c.P \end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned} Q &:= a.Q_1 + b.Q_2 \\ Q_1 &:= c.Q_3 \\ Q_2 &:= c.Q_3 \\ Q_3 &:= a.Q_1 + b.Q_2 \end{aligned}$$

   Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q). Desenha os sistemas de transição correspondentes e testa no pseuCo.com.

9. Considera os processos P e Q definidos por

$$\begin{aligned} P &:= a.P_1 \\ P_1 &:= b.P + c.P \end{aligned}$$

   e

$$\begin{aligned} Q &:= a.Q_1 \\ Q_1 &:= b.Q_2 + c.Q \\ Q_2 &:= a.Q_3 \\ Q_3 &:= b.Q + c.Q_2 \end{aligned}$$

   Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q).

10. Mostra que se $P \sim Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

$$\begin{aligned} \alpha.P &\sim \alpha.Q \\ P + R &\sim Q + R \\ R + P &\sim R + Q \\ P|R &\sim Q|R \\ R|P &\sim R|Q \\ P\backslash H &\sim Q\backslash H \end{aligned}$$

11. Considera os processos

$$\begin{aligned} P &:= a.(b.0 + c.0) \\ Q &:= a.b.0 + a.c.0 \end{aligned}$$

   Mostra que P e Q não são fortemente bissimilares.

12. Mostrar que

$$\begin{aligned} P+Q &\sim Q+P \\ P+0 &\sim P \\ (P+Q)+R &\sim P+(Q+R) \end{aligned}$$

13. Mostrar que para qualquer $P, Q, R \in CCS$,

$$\begin{aligned} P|Q &\sim Q|P \\ P|0 &\sim P \\ (P|Q)|R &\sim P|(Q|R) \end{aligned}$$

Nota: começa por mostrar que as seguintes relações são bissimulações fortes:

$$\begin{aligned} &\{(P|Q, Q|P) \mid P, Q \in CCS\}, \\ &\{(P|0, P) \mid P \in CCS\}, \\ &\{((P|Q)|R, P|(Q|R)) \mid P, Q, R \in CCS\}. \end{aligned}$$

14. o a seguinte especificação de um contador:

$$\begin{aligned} C_0 &:= inc.C_1 \\ C_n &:= inc.C_{n+1} + dec.C_{n-1}, \text{ para } n \geq 1 \end{aligned}$$

e considera o processo $C := inc.(C|dec.0)$. Mostra que a seguinte relação é uma bissimulação.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \{(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \mid k \geq 0 \wedge (P_i = 0 \vee P_i = dec.0) \\ \wedge \text{ o número de } i\text{s com } P_i = dec.0 \text{ é n}\} \end{aligned}$$

Nota: Supõe $(C|\prod_{i=1}^{k} P_i, C_n) \in \mathcal{R}$. mostra que

1. se $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ existe Q tal que $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.
2. se $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ existe P tal que $C|\prod_{i=1}^{k} P_i \xrightarrow{\alpha} P$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

15. Considera a especificação de um buffer com capacidade 1.

$$B := put?.get?.B$$

Para $n \geq 1$ podemos iterativamente definir um buffer de capacidade n, onde B_i^n indica um buffer de capacidade n com $0 \leq i \leq n$ elementos.

$$
\begin{aligned}
B_0^n &:= put?.B_1^n \\
B_i^n &:= put?.B_{i+1}^n + get?.B_{i-1}^n, \;\; 0 < i < n \\
B_n^n &:= get?.B_{n-1}^n
\end{aligned}
$$

(a) Verifica que $B \sim_{iso} B_0^1$ (desenha os seus diagramas).

(b) Verifica que $B_0^2 \sim B_0^1|B_0^1$ (desenha os seus diagramas).

(c) Mostra que para $n \geq 1$, $B_0^n \sim \underbrace{B_0^1|B_0^1|\ldots|B_0^1}$.

Nota: mostrar que a seguinte relação é uma bissimulação

$$
\mathcal{R} \;=\; \{(B_i^n, B_{i_1}^1|B_{i_2}^1|\ldots|B_{i_n}^1) \mid i_j \in \{0,1\} \wedge \sum_{j=1}^{n} i_j = i\}
$$