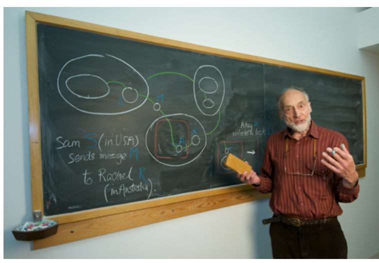
# Aula 3

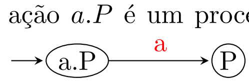
### CCS: Calculus of Communicating Systems

Robin Milner: `https://en.wikipedia.org/wiki/Robin\_Milner` (1934-2010)

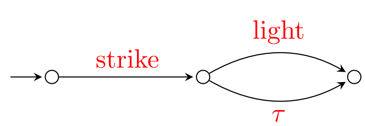



1989

### CCS:Calculus of Communicating Systems

- o processo mais simples é o que não executa nenhuma ação (deadlock): 0
- Se $P$ é um processo e $a$ uma ação $a.P$ é um processo: que executa $a$ e depois comporta-se como $P$. 

- Um fósforo: $strike.light.extinguish.0$ 

- Uma máquina de vender café: $coin.coffee.0$
- Ações internas: $\tau$
- $strike.\tau.0$
- Se houver uma escolha $strike.(light.0+\tau.0)$ 

- Dois fósforos em paralelo: $strike.(light.0|\tau.0)$

### Operadores do CCS

**". " Prefixo** a execução de $\alpha.P$ começa com a execução da ação $\alpha \in Act$ e depois comporta-se como $P$

**"+ " Escolha** O processo $P+Q$ comporta-se como o processo $P$ ou o processo $Q$. É a escolha não determinística

**"| " Composição Paralela** O processo $P|Q$ representa a execução concorrente de $P$ e $Q$ (que progridem independentemente um do outro).

### $CCS_0$ Sequencial sem recursão

Seja $Act$ um conjunto de ações. O conjunto de expressões do $CCS_0$ são dadas pela seguinte gramática

$$P \quad ::= \quad 0 \mid P + P \mid \alpha.P$$

onde supomos as seguintes regras de prioridades

- $P + Q + R$ é $(P + Q) + R$
- $\alpha.\beta.P$ é $\alpha.(\beta.P)$
- $\alpha.P + Q$ é $(\alpha.P) + Q$
- e por vezes omitimos o 0: $\alpha.\beta$ em vez de $\alpha.\beta.0$
- Ex: $strike.(light.0 + \tau.0) \in CCS_0$

**Exemplo 3.1.** *Quais dos seguintes termos são expressões válidas do $CCS_0$:*

1. $0$
2. $a.b.0$
3. $(a.b).0$
4. $(a.(b.0)$
5. $a.b$
6. $0.a.b$
7. $a.(b.0) + 0$
8. $0 + 0$

### Book PseuCo.com

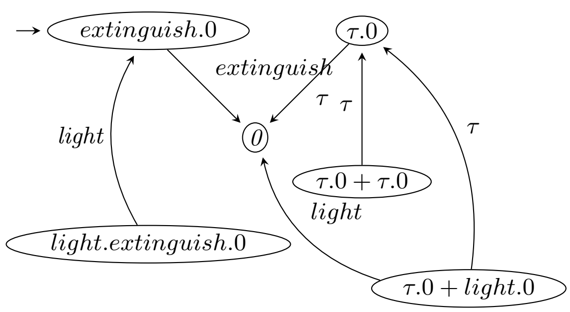
`https://book.pseuco.com/\#`

**Semântica do $CCS_0$**

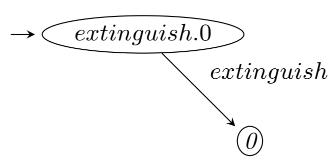
O semântica duma expressão $P$ é $[\![P]\!] = (S, \longrightarrow, s_0)$. onde:

- $S = \{Q \mid Q \in CCS_0\}$ i.e as expressões válidas do $CCS_0$ (que tipo de LTS será?)
- $s_0 = P$
- $\longrightarrow \in (CCS_0 \times Act \times CCS_0)$

**Exemplo 3.2** (Fragmento dum LTS para o processo $extinguish.0$)**.** *$Act = \{strike, light, extinguish, \tau\}$ para $[\![extinguish.0]\!]$ temos:*




**Exemplo 3.3** (Fragmento do LTS acessível para $extinguish.0$)**.** *$Act = \{strike, light, extinguish, \tau\}$ para $[\![extinguish.0]\!]$ Mas, pretendemos apenas o fragmento acessível:*




**Regras de Inferência**

- Permitem definir um LTS cujos estados são expressões e existe uma transição $P \xrightarrow{\alpha} Q$ se esta poder ser demonstrada a partir das regras.
- Uma regra é da forma
$$\frac{P_1 \cdots P_n}{P}$$
- $P_1, \ldots, P_n$ são as *Premissas* ou Hipóteses
- $P$ é a *Conclusão*
- Significa: se $P_1, \ldots, P_n$ se verificarem então $P$ também se verifica (pode ser inferido)
- Se $n = 0$ então a $P$ é um *Axioma*

**Regras do $CCS_0$**

$$\text{Prefixo}\ \dfrac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$$

$$\text{EscolhaE}\ \dfrac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} P'}$$

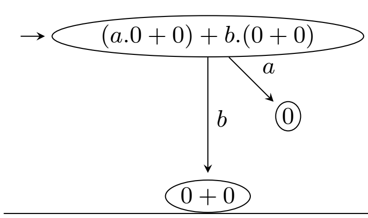
$$\text{EscolhaD}\ \dfrac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P + Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$$

**Exemplo**

$$[\![(a.0 + 0) + b.(0 + 0)]\!]$$

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{}{a.0 \xrightarrow{a} 0}\ \text{Prefixo}}{a.0 + 0 \xrightarrow{a} 0}\ \text{EscolhaE}}{(a.0 + 0) + b.(0 + 0) \xrightarrow{a} 0}\ \text{EscolhaE}$$

$$\dfrac{b.(0 + 0) \xrightarrow{b} 0 + 0}{(a.0 + 0) + b.(0 + 0) \xrightarrow{b} 0 + 0}\ \text{EscolhaD}$$




Regras:

Prefixo $\dfrac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$ EscolhaE $\dfrac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} P'}$ EscolhaD $\dfrac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P+Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$

**Exercício 3.1.** *Determina:*

1. $[\![light.(burn.extinguish.0 + smolder.0)]\!]$
2. $[\![a.(b.0 + a.(0 + 0) + 0) + b.0 + a.(0 + 0)]\!]$

$\diamond$

**Semântica do $CCS_0$ (II)**

A relação $\longrightarrow$ é a menor tal que, para todo $\alpha \in Act$ e $P, Q \in CCS_0$,

- $(\alpha.P, \alpha, P) \in \longrightarrow$
- $(P + Q, \alpha, P') \in \longrightarrow$ ) se $(P, \alpha, P') \in \longrightarrow$
- $(P + Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow$ ) se $(Q, \alpha, Q') \in \longrightarrow$
- nada mais está em $\longrightarrow$

---

Regras:

Prefixo $\dfrac{}{\alpha.P \xrightarrow{\alpha} P}$ EscolhaE $\dfrac{P \xrightarrow{\alpha} P'}{P{+}Q \xrightarrow{\alpha} P'}$ EscolhaD $\dfrac{Q \xrightarrow{\alpha} Q'}{P{+}Q \xrightarrow{\alpha} Q'}$

**Semântica do $CCS_0$ (II)**

O conjunto de todos os LTSs sobre expressões do $CCS_0$ é

$$LTS_0 = \{(CCS_0, T, P) \mid T \subseteq (CCS_0 \times Act \times CCS_0), P \in CCS_0\}$$

A semântica das expressões do $CCS_0$ é então

$$[\![\_]\!] : CCS_0 \to LTS_0$$

tal que

$$[\![P]\!] = (CCS_0, \longrightarrow, P)$$

com $\longrightarrow$ definida no slide anterior.

- Contudo apenas interessa um fragmento de $[\![P]\!]$
- Só interessam estados atingíveis de $P$
- Só interessam as acções dos estados atingíveis
- Não interessam os nomes dos estados atingíveis
- Por exemplo $\alpha.0 + 0$ e $0 + \alpha.0$ não têm o mesmo LTS (verifica) mas são *isomorfos*.

**Isomorfismo**

Dois LTS $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$ and $TS' = (S', \longrightarrow', s'_0)$ são isomorfos, $TS \sim TS'$, se existe uma bijeção $f$ com

$$f : Reach(TS) \to Reach(TS')$$

com

- $f(s_0) = s'_0$

- para todos os $s_1, s_2 \in \mathit{Reach}(TS)$ e para toda $\alpha \in \mathit{Act}$

$$s_1 \xrightarrow{\alpha} s_2 \quad sse \quad f(s_1) \xrightarrow{\alpha}{}' f(s_2)$$

- Dois LTSs isomorfos são indistinguíveis para um observador.

**Exercício 3.2.** *Mostrar que o isomorfismo de LTSs é uma relação de equivalência.* ◇

**Exercício 3.3.** *Mostrar que um LTS que é finitamente ramificado e tem um número finito de estados é isomorfo a um LTS finito por estados.* ◇

**Exercício 3.4.** *Mostra que dado um LTS finito $TS$ (acíclico) existe uma expressão $P$ do $CCS_0$ tal que $TS = [\![P]\!]$.* ◇

**PseuCo.com**

`http://tinyurl.com/pseuco`