Aula 8

Bissimulação

- Interessa a interação dos processo ao longo da execução e não apenas a sequência de ações
- Dois processos têm o mesmo comportamento se podem mutuamente simular as ações um do outro
- isto é, se dois estados têm o mesmo comportamento os seus sucessores também devem ter.

Formalmente

P e Q são equivalentes, $P \equiv Q$ se e só se para toda a acção $\alpha \in Act$

- Se $P \xrightarrow{\alpha} P'$ então existe Q' tal que $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ e $P' \equiv Q'$
- Se $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ então existe P' tal que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ e $P' \equiv Q'$.

Mas esta formalização não é uma definição porque há muitas relações que a verificam (p.e $Id(CCS)$ e $Uni(CCS)$).

Relação de bissimulação (Forte)

Seja $TS = (S, \longrightarrow, s_0)$. Uma relação $R \in S \times S$ é uma *bissimulação* se sempre que $(s,t) \in R$ (ou $s\ R\ t$) e $\alpha \in Act$:

- se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $(s', t') \in R$
- Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $(s', t') \in R$.

$$\begin{tikzcd} P \arrow[dd, "\forall"'] & R & Q \arrow[dd, "\exists"'] \\ & & \\ P' & R & Q' \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q \arrow[dd, "\forall"'] & R & P \arrow[dd, "\exists"'] \\ & & \\ Q' & R & P' \end{tikzcd}$$

bissimilaridade

Dois estados s e t são *bissimilares* e escreve-se $s \sim t$, se existe uma bissimulação R tal que $(s,t) \in R$.

Isto é

$$\sim = \bigcup_{\text{R é bissimulação}} R$$

A relação $\sim$ chama-se *bissimilaridade*

Teorema 8.1. *A relação $\sim$ é de equivalência.*

Notar que se R é uma bissimulação R^{-1} também é.

Teorema 8.2. *A relação $\sim$ é a maior bissimulação.*

Mostrar que $\sim$ é uma bissimulação.

Teorema 8.3. *$s \sim t$ se e só se para cada $\alpha \in Act$*

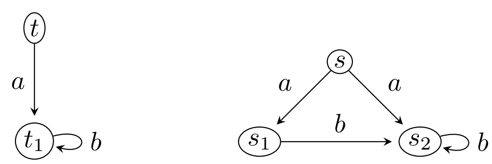
- *Se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$*
- *Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $s' \sim t'$.*

$\Rightarrow$: porque $\sim$ é bissimulação $\Leftarrow$: temos que ter uma bissimulação $\mathcal{R}$ tal que $(s,t) \in \mathcal{R}$. Então, temos também que ter $(s',t') \in \mathcal{R}$ o que podemos fazer se adicionarmos a $\mathcal{R}$ todos os pares de $\sim$. Tomando $\mathcal{R} = \{(s,t)\} \cup \sim$ temos o que queremos

Exercício 8.1. *Termina cautelosamente todas as provas anteriores.* $\diamond$

Exemplo 1

Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s, s_1, t, t_1\}$, $Act = \{a, b\}$ e $\longrightarrow$ definida pelos seguintes diagramas:



Mostrar que $s \sim t$. Temos de encontrar $R \subseteq S \times S$ tal que

1. R (forte) bissimulação
2. $(s,t) \in R$.

Se $(s,t) \in R$ então para s temos $s \xrightarrow{a} s_1$ podemos selecionar t_1 com $t \xrightarrow{a} t_1$ e portanto também terá de ser $(s_1, t_1) \in R$; $s \xrightarrow{a} s_2$ também podemos selecionar t_1 com $t \xrightarrow{a} t_1$ e portanto também terá de ser $(s_2, t_1) \in R$; Se $(s,t) \in R$ então para t temos $t \xrightarrow{a} t_1$ podemos selecionar s_2 com $s \xrightarrow{a} s_2$ e portanto também terá de ser $(s_2, t_1) \in R$; e não há mais transições. Se $(s_1, t_1) \in R$ então para s_1 temos que $s_1 \xrightarrow{b} s_2$ e podemos selecionar t_1 com $t_1 \xrightarrow{b} t_1$ e $(s_1, t_1) \in R$. Se $(s_1, t_1) \in R$ então para t_1 temos que $t_1 \xrightarrow{b} t_1$ e podemos selecionar s_2 com $s_1 \xrightarrow{b} s_2$ e $(s_2, t_1) \in R$. Se $(s_2, t_1) \in R$ então para s_2 temos que $s_2 \xrightarrow{b} s_2$ e podemos selecionar t_1 com $t_1 \xrightarrow{b} t_1$ e

$(s_2, t_1) \in R$. Se $(s_2, t_1) \in R$ então para t_1 temos que $t_1 \xrightarrow{b} t_1$ e podemos selecionar s_2 com $s_2 \xrightarrow{b} s_2$ e $(s_2, t_1) \in R$.

Concluímos que é uma bissimulação a relação

$$R = \{(s, t), (s_1, t_1), (s_2, t_1)\}$$

e portanto $s \sim t$. Mostra também que $s_1 \sim s_2$ porque $R_1 = \{(s_1, s_2), (s_2, s_2)\}$ é uma bissimulação.

Exemplo 2

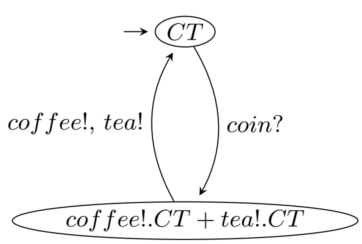
Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1} \mid i \geq 1\} \cup \{(t, t)\}$.

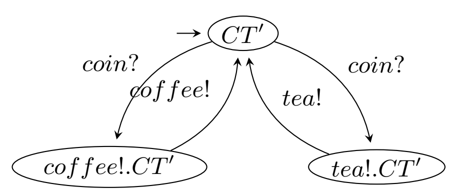
Mostrar que $s_1 \sim t$ provando que $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ é uma bissimulação.

Como mostrar que dois processos não são bissimilares?

Mostrar que CT e CT' não são bissimilares, onde

$$\begin{array}{rcl} CT & := & coin?.(coffee!.CT + tea!.CT) \\ CT' & := & coin?.coffee!.CT' + coin?.tea!.CT' \end{array}$$

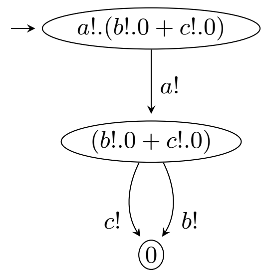


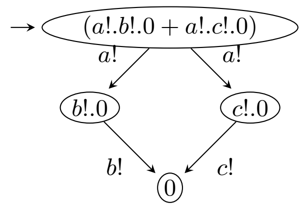


Por contradição, seja R uma bissimulação com $(CT, CT') \in R$.

Como $CT' \xrightarrow{coin?} tea!.CT'$, tem de existir P' tal que $CT \xrightarrow{coin?} P'$ e $(tea!.CT', P') \in R$. Só pode ser $P' = coffee!.CT + tea!.CT$. Mas então $P' \xrightarrow{coffee!} CT$ e $tea!.CT'$ não tem transições por $coffee!$. Logo $CT \not\sim CT'$.

Jogo da bissimulação (forte)





Podemos mostrar que $a!.(b!.0 + c!.0) \not\sim a!.b!.0 + a!.c!.0$ jogando um jogo de dois jogadores: o atacante e o defesa. O atacante quer mostrar que dois estados (s, t) não são bissimilares e o defesa quer mostrar que são.

- O *atacante* escolhe um dos estados (s ou t) e uma ação α duma transição do estado escolhido
- O *defesa* escolhe uma transição pela mesma ação do outro estado
- Se o defesa não poder jogar então os estados *não são bissimilares*

- A: $a!.(b!.0 + c!.0) \xrightarrow{a!} (b!.0 + c!.0)$
- D: $(a!.b!.0 + a!.c!.0) \xrightarrow{a!} b!.0$
- A: $b!.0 + c!.0 \xrightarrow{c!} 0$
- D não pode jogar, logo $a!.(b!.0 + c!.0) \not\sim a!.b!.0 + a!.c!.0$.

Jogo de bissimulação forte

Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ um LTS. Um *jogo de bissimulação forte* começando em $(s_1, t_1) \in S \times S$ é um jogo com um atacante e um defesa, jogando em rondas

- Em cada ronda um par de estados é a configuração corrente.
- No início é (s_1, t_1).
- Em cada ronda a configuração corrente muda de acordo com as seguintes regras:
-
  - O atacante escolhe ou o estado esquerdo ou o estado direito da configuração corrente (s, t) e uma transição por α do estado que escolheu (ou $s \xrightarrow{\alpha} s'$ ou $t \xrightarrow{\alpha} t'$).
  - O defesa tem de escolher uma transição pela mesma acção do estado que não foi escolhido pelo atacante (ou $t \xrightarrow{\alpha} t'$ ou $s \xrightarrow{\alpha} s'$).
  - A nova configuração corrente é (s', t') e o jogo continua

Estratégias vencedoras do jogo de bissimulação forte

- Um jogo é uma sequência maximal de configurações correntes.
- Um jogo finito é perdido pelo jogador que não pode jogar
- Se o jogo for infinito o defesa ganha
- Uma estratégia vencedora de um jogador é universal se permite que ele vença independentemente das jogadas do outro jogador.

Proposição 8.1. *Os estados s_1 e t_1 são bissimilares se e só se o defesa tiver uma estratégia vencedora universal. Os estados não são bissimilares se o atacante tiver uma estratégia vencedora universal*

Exemplo

Considera os processos P e Q definidos por

$$\begin{array}{rcl} P & := & a.P_1 + b.P_2 \\ P_1 & := & c.P \\ P_2 & := & c.P \end{array}$$

e

$$\begin{array}{rcl} Q & := & a.Q_1 + b.Q_2 \\ Q_1 & := & c.Q_3 \\ Q_2 & := & c.Q_3 \\ Q_3 & := & a.Q_1 + b.Q_2 \end{array}$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q). Desenha os sistemas de transição correspondentes e testa no pseuCo.com (ou CAAL).

A bissimilaridade é uma congruência

Teorema 8.4. *Para todo $P, Q \in CCS$ e todos os contextos CCS $C[\cdot]$, $P \sim Q$ implica que $C[P] \sim C[Q]$.*

Dem: Por indução na estrutura dos possíveis $C[\cdot]$.

Em particular se $P \sim Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

$$\begin{array}{rcl} \alpha.P & \sim & \alpha.Q \\ P + R & \sim & Q + R \\ R + P & \sim & R + Q \\ P|R & \sim & Q|R \\ R|P & \sim & R|Q \\ P\backslash H & \sim & Q\backslash H \end{array}$$

Vamos analisar o caso $P|R \sim Q|R$.

Se $P \sim Q$ **então** $(P|R) \sim (Q|R)$

Seja

$$\mathcal{R} \quad = \quad \{(P'|R', Q'|R') \mid P', Q', R' \in CCS \wedge P' \sim Q'\}$$

- É fácil ver que $(P|R, Q|R) \in \mathcal{R}$.
- Temos que mostrar que $\mathcal{R}$ é uma bissimulação.
- Usando a simetria basta ver que se $(P'|R', Q'|R') \in \mathcal{R}$ e $P'|R' \xrightarrow{\alpha} S$ então existe S' tal que $Q'|R' \xrightarrow{\alpha} S'$ e $(S, S') \in \mathcal{R}$.
- A prova segue por análise de casos às possíveis maneiras de obter a transição $P'|R' \xrightarrow{\alpha} S$ (i.e., qual a última regra aplicada).

A última regra aplicada pode ser:

- $ParE$: então $P'|R' \xrightarrow{\alpha} S$ resulta de $P' \xrightarrow{\alpha} P''$ e $S = P''|R'$. Neste caso, sei que existe Q'' tal que $Q' \xrightarrow{\alpha} Q''$ e $P'' \sim Q''$. Pela regra $ParE$, $Q'|R' \xrightarrow{\alpha} Q''|R'$ e por definição $(P''|R', Q''|R') \in \mathcal{R}$, logo basta tomar $S' = Q''|R'$.
- $ParD$: análogo ao anterior (verifica!)
- Syn: então $P'|R' \xrightarrow{\tau} S$ resulta de $P' \xrightarrow{a} P''$ e $R' \xrightarrow{\overline{a}} R''$, sendo $S = P''|R''$. Como $P' \sim Q'$ existe Q'' com $Q' \xrightarrow{a} Q''$ tal que $P'' \sim Q''$. Então também, $Q'|R' \xrightarrow{\tau} Q''|R''$ e $(P''|R'', Q''|R'') \in \mathcal{R}$, logo basta tomar $S' = Q''|R''$.

A bissimilaridade é sensível a deadlocks

Sempre que $P \sim Q$ então $TTraces(P) = TTraces(Q)$.

Dem: Temos que

$$TTraces(P) = \{\rho \in Traces([\![P]\!]_\Gamma) \mid \exists P' : P \overset{\rho}{\rightsquigarrow} P' \wedge P' \not\rightarrow \}$$

. Por contradição.

- Seja $P \sim Q$, $\sigma \in TTraces(P)$ e $\sigma \notin TTraces(Q)$.
- Seja $\sigma = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_k$. Do estado inicial $s_0 = P$ temos

$$s_0 \xrightarrow{\alpha_1} s_1 \xrightarrow{\alpha_2} s_2 \ldots \xrightarrow{\alpha_k} s_k \not\rightarrow$$

- Como $P \sim Q$ existe uma bissimulação R com $(P, Q) \in R$.

- E então existem $t_0, \ldots, t_k$ com $t_0 = Q$ e $(s_i, t_i) \in R$ e

$$t_0 \xrightarrow{\alpha_1} t_1 \xrightarrow{\alpha_2} t_2 \ldots \xrightarrow{\alpha_k} t_k$$

- mas então $t_k \not\rightarrow$ senão R não era uma bissimulação dado que existia t' e α tal que $t_k \xrightarrow{\alpha} t'$ e não existia transição por α de s_k.

Mais Propriedades de $\sim$

Teorema 8.5.

$$\begin{array}{rcl} P+Q & \sim & Q+P \\ P|Q & \sim & Q|P \\ P+0 & \sim & P \\ P|0 & \sim & P \\ (P+Q)+R & \sim & P+(Q+R) \\ (P|Q)|R & \sim & P|(Q|R) \end{array}$$

Mas $\alpha.(P+Q) \not\sim \alpha.P + \alpha.Q$.

Proof. (Fragmentos) Mostrar que $P+Q \sim Q+P$. Suponhamos que $P+Q \xrightarrow{\alpha} P'$. Pelas regras de dedução então $P \xrightarrow{\alpha} P'$ ou $Q \xrightarrow{\alpha} P'$. Em ambos os casos podemos também concluir que $Q+P \xrightarrow{\alpha} P'$ e sabemos que $P' \sim P'$.

Mostrar que $P|Q \sim Q|P$. Basta mostrar que

$$S = \{((P_1|P_2), (P_2|P_1)) \mid P_1, P_2 \in CCS\}$$

é uma bissimulação. É evidente que $((P|Q), (Q|P)) \in S$. Se $P|Q \xrightarrow{\alpha} P'|Q$. Então

- se $P \xrightarrow{\alpha} P'$, então $Q|P \xrightarrow{\alpha} Q|P'$ e $(P'|Q, Q|P') \in S$.
- se $Q \xrightarrow{\alpha} Q'$ é análogo.

Se $P|Q \xrightarrow{\tau} P'|Q'$, então $P \xrightarrow{\alpha} P'$ e $Q \xrightarrow{\overline{\alpha}} Q'$, para algum α. E então também $Q|P \xrightarrow{\tau} Q'|P'$ e $(P'|Q', Q'|P') \in S$. □