

Programação Concorrente - Exercícios 4

Isomorfismo, Equivalência de Traços e Bissimulação Forte

Consultar os Capitulo 3-1-3,3 e 3.5 de [1].

1. Sendo

$$\begin{aligned} P &:= a!.0 + b!.0 \\ Q &:= b!.0 + a!.0 \end{aligned}$$

será que se verificam as seguintes relações

$$\begin{aligned} P &\sim_{tr} Q \\ a!.P &\sim_{tr} a!.Q \\ a!.P + a!.P &\sim_{tr} a!.Q + a!.Q \end{aligned}$$

e o mesmo para \sim_{iso} ?

Solution: Sim para ambas as relações.

2. Mostra que $(b!.0 + c!.0) \sim_{iso} (c!.0 + b!.0)$ mas $a!.(b!.0 + c!.0) + a!.(b!.0 + c!.0) \not\sim_{iso} a!.(b!.0 + c!.0) + a!.(c!.0 + b!.0)$ e conclui que \sim_{iso} não é uma congruência.
3. Mostra que para qualquer $P, Q, R \in CCS$

$$\begin{aligned} P + Q &\sim_{tr} Q + P \\ (P + Q) + R &\sim_{tr} P + (Q + R) \\ P + 0 &\sim_{tr} P, \end{aligned}$$

e $\alpha.(P + Q) \sim_{tr} \alpha.P + \alpha.Q$.

4. Sendo

$$\begin{aligned} CTM &:= coin?.(coffee!.CTM + tea!.CTM) \\ CTM' &:= coin?.coffee!.CTM' + coin?.tea!.CTM' \end{aligned}$$

Mostra que $CTM \sim_{tr} CTM'$.

5. Resolver os exercícios de bissimulação em <http://tinyurl.com/pseuco>
6. Mostra as seguintes propriedades da relação de bissimilaridade \sim
- (a) \sim é uma relação de equivalência.

Solution: Para mostrar que é reflexiva basta mostrar que a identidade $Id = \{(P, P) \mid P \in \}$ é uma bissimulação: Se $(P, P) \in Id$ e existe $\alpha \in Act$ tal que $P \xrightarrow{\alpha} P'$ então também $P \xrightarrow{\alpha} P'$ e $(P', P') \in Id$. Então $Id \subseteq \sim$, logo \sim é reflexiva. Para a simetria, se $s_1 \sim s_2$ então existe uma bissimulação R tal que $(s_1, s_2) \in R$. Seja $R^{-1} = \{(s', s) \mid (s, s') \in R\}$. Então $(s_2, s_1) \in R^{-1}$ e R^{-1} é uma bissimulação: se $s_2 \xrightarrow{\alpha} s'_2$ sei que existe $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$ com $(s'_1, s'_2) \in R$, logo $(s'_2, s'_1) \in R^{-1}$. O mesmo se $s_1 \xrightarrow{\alpha} s'_1$. Para a transitividade seja $s_1 \sim s_2$ e $s_2 \sim s_3$. Temos que mostrar que $s_1 \sim s_3$. Sabemos que existem duas bissimulações R e R' tal que $(s_1, s_2) \in R$ e $(s_2, s_3) \in R'$. Seja

$$S = \{(s'_1, s'_3) \mid (s'_1, s'_2) \in R \wedge (s'_2, s'_3) \in R'\}.$$

Temos que $(s_1, s_3) \in S$ e S é uma bissimulação: se $(s, t) \in S$ então existe w tal que $(s, w) \in R$ e $(w, t) \in R'$. Seja $s \xrightarrow{\alpha} s'$, então existe $w \xrightarrow{\alpha} w'$ tal que $(s', w') \in R$ e $w \xrightarrow{\alpha} w'$, tal que $(w', t') \in R'$. Logo $(s', t') \in S$ como queríamos. O mesmo acontece se tivermos/começarmos com $t \xrightarrow{\alpha} t'$.

(b) \sim é maior bissimulação.

Solution: Por definição \sim é a reunião de todas as bissimulações. Temos de mostrar que essa reunião é uma bissimulação. Pela simetria basta mostrar uma das condições. Seja $(s, t) \in \bigcup \{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ e $s \xrightarrow{\alpha} s'$. Então existe uma bissimulação R_1 tal que $(s, t) \in R_1$ e um t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $(s', t') \in R_1 \subseteq \bigcup \{R \mid R \text{ bissimulação}\}$. Logo $\bigcup \{R \mid R \text{ bissimulação}\}$ é uma bissimulação.

(c) $s \sim t$ se e só se para cada $\alpha \in Act$

- Se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$
- Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $s' \sim t'$.

7. Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1}) \mid i \geq 1\} \cup \{(t, t)\}$.

Mostrar que $s_1 \sim t$ provando que $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ é uma bissimulação.

8. Considera os processos P e Q definidos por

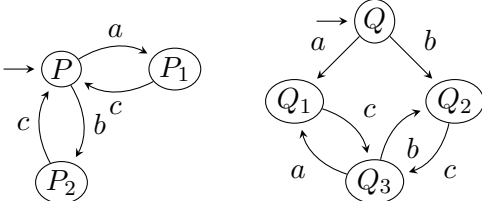
$$\begin{aligned} P &:= a.P_1 + b.P_2 \\ P_1 &:= c.P \\ P_2 &:= c.P \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} Q &:= a.Q_1 + b.Q_2 \\ Q_1 &:= c.Q_3 \\ Q_2 &:= c.Q_3 \\ Q_3 &:= a.Q_1 + b.Q_2 \end{aligned}$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q) . Desenha os sistemas de transição correspondentes e testa no pseuCo.com.

Solution: Temos os seguintes LTSs para P e Q , respectivamente.



Para que $P \sim Q$ tem de existir uma bissimulação (forte) R que contenha o par (P, Q) . A seguinte tabela mostra a construção duma bissimulação R . Para cada par apenas é necessário considerar as ações do primeiro elemento do par dado os LTSs serem determinísticos. As marcas (x) indicam que chegamos a um par que já está em R (na primeira coluna).

R	Acções
(P, Q)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q \xrightarrow{a} Q_1$ $P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q \xrightarrow{b} Q_2$
(P_1, Q_1)	$P_1 \xrightarrow{c} P$ e $Q_1 \xrightarrow{c} Q_2$
(P_2, Q_2)	$P_2 \xrightarrow{c} P$ e $Q_2 \xrightarrow{c} Q_3$
(P, Q_2)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q_2 \xrightarrow{a} Q_1 (x)$ $P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q_2 \xrightarrow{b} Q_2 (x)$
(P, Q_3)	$P \xrightarrow{a} P_1$ e $Q_3 \xrightarrow{a} Q_1 (x)$ $P \xrightarrow{b} P_2$ e $Q_3 \xrightarrow{b} Q_2 (x)$

Temos que a bissimulação $R = \{(P, Q), (P_1, Q_1), (P_2, Q_2), (P, Q_2), (P, Q_3)\}$.

9. Considera os processos P e Q definidos por

$$P := a.P_1$$

$$P_1 := b.P + c.P$$

e

$$Q := a.Q_1$$

$$Q_1 := b.Q_2 + c.Q$$

$$Q_2 := a.Q_3$$

$$Q_3 := b.Q + c.Q_2$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q) .

10. Mostra que se $P \sim Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

$$\begin{aligned} \alpha.P &\sim \alpha.Q \\ P + R &\sim Q + R \\ R + P &\sim R + Q \\ P|R &\sim Q|R \\ R|P &\sim R|Q \\ P \setminus H &\sim Q \setminus H \end{aligned}$$

11. Considera os processos

$$\begin{aligned} P &:= a.(b.0 + c.0) \\ Q &:= a.b.0 + a.c.0 \end{aligned}$$

Mostra que P e Q não são fortemente bissimilares.

Solution: Temos os seguintes LTSs

e os seguinte jogo de bissimulação forte enter um atacante (A), que quer mostrar que P e Q não são bissimilares e um defesa (D) que pretende mostrar que são (obtendo um bissimulação) (ver definição):

- A: $P \xrightarrow{a} (b.0 + c.0)$
- D: $Q \xrightarrow{a} b.0$
- A: $b.0 + c.0 \xrightarrow{c} 0$
- D não pode jogar, logo , perde e concluimos que $P \not\sim Q$.

12. Mostrar que

$$\begin{aligned} P + Q &\sim Q + P \\ P + 0 &\sim P \\ (P + Q) + R &\sim P + (Q + R) \end{aligned}$$

Solution: Ver Teorema 7.5 das aulas teóricas. E também [1].

13. Mostrar que para qualquer $P, Q, R \in CCS$,

$$\begin{aligned} P|Q &\sim Q|P \\ P|0 &\sim P \\ (P|Q)|R &\sim P|(Q|R) \end{aligned}$$

Nota: começa por mostrar que as seguintes relações são bissimulações fortes:

$$\begin{aligned} &\{(P|Q, Q|P) \mid P, Q \in CCS\}, \\ &\{(P|0, P) \mid P \in CCS\}, \\ &\{((P|Q)|R, P|(Q|R)) \mid P, Q, R \in CCS\}. \end{aligned}$$

14. o a seguinte especificação de um contador:

$$\begin{aligned} C_0 &:= inc.C_1 \\ C_n &:= inc.C_{n+1} + dec.C_{n-1}, \text{ para } n \geq 1 \end{aligned}$$

e considera o processo $C := inc.(C|dec.0)$. Mostra que a seguinte relação é uma bissimulação.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} &= \{(C \mid \prod_{i=1}^k P_i, C_n) \mid k \geq 0 \wedge (P_i = 0 \vee P_i = dec.0) \\ &\quad \wedge \text{o número de } is \text{ com } P_i = dec.0 \text{ é } n\} \end{aligned}$$

Nota: Supõe $(C \mid \prod_{i=1}^k P_i, C_n) \in \mathcal{R}$. mostra que

1. se $C \mid \prod_{i=1}^k P_i \xrightarrow{\alpha} P$ existe Q tal que $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.
2. se $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ existe P tal que $C \mid \prod_{i=1}^k P_i \xrightarrow{\alpha} P$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

15. Considera a especificação de um buffer com capacidade 1.

$$B := put?.get?.B$$

Para $n \geq 1$ podemos iterativamente definir um buffer de capacidade n , onde B_i^n indica um buffer de capacidade n com $0 \leq i \leq n$ elementos.

$$\begin{aligned} B_0^n &:= put?.B_1^n \\ B_i^n &:= put?.B_{i+1}^n + get?.B_{i-1}^n, \quad 0 < i < n \\ B_n^n &:= get?.B_{n-1}^n \end{aligned}$$

- (a) Verifica que $B \sim_{iso} B_0^1$ (desenha os seus diagramas).
- (b) Verifica que $B_0^2 \sim B_0^1 | B_0^1$ (desenha os seus diagramas).
- (c) Mostra que para $n \geq 1$, $B_0^n \sim \underbrace{B_0^1 | B_0^1 | \dots | B_0^1}_n$.

Nota: mostrar que a seguinte relação é uma bissimulação

$$\mathcal{R} = \{(B_i^n, B_{i_1}^1 | B_{i_2}^1 | \dots | B_{i_n}^1) \mid i_j \in \{0, 1\} \wedge \sum_{j=1}^n i_j = i\}$$

Referências

- [1] Luca Aceto, Anna Ingólfssdóttir, and Kim Larsen. *Reactive Systems: Modeling, Specification and Verification*. CUP, 2007.