

Programação Concorrente - Exercícios 4

Isomorfismo, Equivalência de Traços e Bissimulação Forte

Consultar os Capitulo 3-1-3,3 e 3.5 de [1].

1. Sendo

$$\begin{aligned} P &:= a!.0 + b!.0 \\ Q &:= b!.0 + a!.0 \end{aligned}$$

será que se verificam as seguintes relações

$$\begin{aligned} P &\sim_{tr} Q \\ a!.P &\sim_{tr} a!.Q \\ a!.P + a!.P &\sim_{tr} a!.Q + a!.Q \end{aligned}$$

e o mesmo para \sim_{iso} ?

2. Mostra que $(b!.0 + c!.0) \sim_{iso} (c!.0 + b!.0)$ mas $a!.(b!.0 + c!.0) + a!.(b!.0 + c!.0) \not\sim_{iso} a!.(b!.0 + c!.0) + a!.(c!.0 + b!.0)$ e conclui que \sim_{iso} não é uma congruência.
3. Mostra que para qualquer $P, Q, R \in CCS$

$$\begin{aligned} P + Q &\sim_{tr} Q + P \\ (P + Q) + R &\sim_{tr} P + (Q + R) \\ P + 0 &\sim_{tr} P, \end{aligned}$$

e $\alpha.(P + Q) \sim_{tr} \alpha.P + \alpha.Q$.

4. Sendo

$$\begin{aligned} CTM &:= coin?.(coffee!.CTM + tea!.CTM) \\ CTM' &:= coin?.coffee!.CTM' + coin?.tea!.CTM' \end{aligned}$$

Mostra que $CTM \sim_{tr} CTM'$.

5. Resolver os exercícios de bissimulação em <http://tinyurl.com/pseuco>
6. Resolver os exercícios/quizz de bissimulação (forte) em PseuCo Book <https://book.pseuco.com/#/read/equality/workout>
7. Mostra as seguintes propriedades da relação de bissimilaridade \sim
 - (a) \sim é uma relação de equivalência.
 - (b) \sim é maior bissimulação.
 - (c) $s \sim t$ se e só se para cada $\alpha \in Act$

- Se $s \xrightarrow{\alpha} s'$ então existe t' tal que $t \xrightarrow{\alpha} t'$ e $s' \sim t'$
- Se $t \xrightarrow{\alpha} t'$ então existe s' tal que $s \xrightarrow{\alpha} s'$ e $s' \sim t'$.

8. Seja $TS = (S, Act, \longrightarrow)$ tal que $S = \{s_i \mid i \geq 1\} \cup \{t\}$, $Act = \{a\}$ e $\xrightarrow{a} = \{(s_i, s_{i+1} \mid i \geq 1\} \cup \{(t, t)\}$.

Mostrar que $s_1 \sim t$ provando que $R = \{(s_i, t) \mid i \geq 1\}$ é uma bissimulação.

9. Considera os processos P e Q definidos por

$$P := a.P_1 + b.P_2$$

$$P_1 := c.P$$

$$P_2 := c.P$$

e

$$Q := a.Q_1 + b.Q_2$$

$$Q_1 := c.Q_3$$

$$Q_2 := c.Q_3$$

$$Q_3 := a.Q_1 + b.Q_2$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q) . Desenha os sistemas de transição correspondentes e testa no pseuCo.com.

10. Considera os processos P e Q definidos por

$$P := a.P_1$$

$$P_1 := b.P + c.P$$

e

$$Q := a.Q_1$$

$$Q_1 := b.Q_2 + c.Q$$

$$Q_2 := a.Q_3$$

$$Q_3 := b.Q + c.Q_2$$

Mostra que $P \sim Q$ encontrando uma bissimulação que contenha (P, Q) .

11. Mostra que se $P \sim Q$ e $\alpha \in Act$, $R \in CCS$ e $H \subseteq Com$,

$$\alpha.P \sim \alpha.Q$$

$$P + R \sim Q + R$$

$$R + P \sim R + Q$$

$$P|R \sim Q|R$$

$$R|P \sim R|Q$$

$$P \setminus H \sim Q \setminus H$$

12. Considera os processos

$$\begin{aligned} P &:= a.(b.0 + c.0) \\ Q &:= a.b.0 + a.c.0 \end{aligned}$$

Mostra que P e Q não são fortemente bissimilares.

13. Mostrar que

$$\begin{aligned} P + Q &\sim Q + P \\ P + 0 &\sim P \\ (P + Q) + R &\sim P + (Q + R) \end{aligned}$$

14. Mostrar que para qualquer $P, Q, R \in CCS$,

$$\begin{aligned} P|Q &\sim Q|P \\ P|0 &\sim P \\ (P|Q)|R &\sim P|(Q|R) \end{aligned}$$

Nota: começa por mostrar que as seguintes relações são bissimulações fortes:

$$\begin{aligned} \{(P|Q, Q|P) \mid P, Q \in CCS\}, \\ \{(P|0, P) \mid P \in CCS\}, \\ \{((P|Q)|R, P|(Q|R)) \mid P, Q, R \in CCS\}. \end{aligned}$$

15. o a seguinte especificação de um contador:

$$\begin{aligned} C_0 &:= inc.C_1 \\ C_n &:= inc.C_{n+1} + dec.C_{n-1}, \text{ para } n \geq 1 \end{aligned}$$

e considera o processo $C := inc.(C|dec.0)$. Mostra que a seguinte relação é uma bissimulação.

$$\begin{aligned} \mathcal{R} = \{ & (C | \prod_{i=1}^k P_i, C_n) \mid k \geq 0 \wedge (P_i = 0 \vee P_i = dec.0) \\ & \wedge \text{o número de is com } P_i = dec.0 \text{ é } n \} \end{aligned}$$

Nota: Supõe $(C | \prod_{i=1}^k P_i, C_n) \in \mathcal{R}$. mostra que

1. se $C | \prod_{i=1}^k P_i \xrightarrow{\alpha} P$ existe Q tal que $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.
2. se $C_n \xrightarrow{\alpha} Q$ existe P tal que $C | \prod_{i=1}^k P_i \xrightarrow{\alpha} P$ e $(P, Q) \in \mathcal{R}$.

16. Considera a especificação de um buffer com capacidade 1.

$$B := put?.get?.B$$

Para $n \geq 1$ podemos iterativamente definir um buffer de capacidade n , onde B_i^n indica um buffer de capacidade n com $0 \leq i \leq n$ elementos.

$$\begin{aligned} B_0^n &:= put?.B_1^n \\ B_i^n &:= put?.B_{i+1}^n + get?.B_{i-1}^n, \quad 0 < i < n \\ B_n^n &:= get?.B_{n-1}^n \end{aligned}$$

- (a) Verifica que $B \sim_{iso} B_0^1$ (desenha os seus diagramas).
- (b) Verifica que $B_0^2 \sim B_0^1 | B_0^1$ (desenha os seus diagramas).
- (c) Mostra que para $n \geq 1$, $B_0^n \sim \underbrace{B_0^1 | B_0^1 | \dots | B_0^1}_n$.

Nota: mostrar que a seguinte relação é uma bissimulação

$$\mathcal{R} = \{(B_i^n, B_{i_1}^1 | B_{i_2}^1 | \dots | B_{i_n}^1) \mid i_j \in \{0, 1\} \wedge \sum_{j=1}^n i_j = i\}$$

Referências

- [1] Luca Aceto, Anna Ingólfssdóttir, and Kim Larsen. *Reactive Systems: Modeling, Specification and Verification*. CUP, 2007.