

1 Semântica da Programação em Lógica

1. Escreve as cláusulas abaixo sem ser em notação clausal:

$$\begin{aligned} p(a) &\leftarrow p(X), q(X) \\ p(f(X)) &\leftarrow p(X) \\ q(b) &\leftarrow \\ q(f(X)) &\leftarrow q(X) \\ &\leftarrow q(f(f(a))) \end{aligned}$$

2. Usando o sistema de reescrita dado nas aulas, calcula um umg (unificador mais geral) ou indica que não existe para cada um dos seguintes conjuntos de equações de termos:

- (a) $\{g(a, X, h(g(Z))) = g(Z, h(Y), h(Y))\}$
- (b) $\{X = g(Y), g(U) = g(Z), U = a\}$
- (c) $\{g(X, f(X, W)) = g(g(W), f(g(b), Z))\}$
- (d) $\{g(Z, h(Z), Z) = g(f(V), h(h(X)), X)\}$

3. Considera o programa $\mathcal{P}$

$$\begin{aligned} p(f(X)) &\leftarrow p(X) \\ q(a) &\leftarrow p(X) \end{aligned}$$

Para $I_1 = B_{\mathcal{P}}$, $I_2 = T_{\mathcal{P}}(I_1)$ e $I_3 = \emptyset$ determina $T_{\mathcal{P}}(I_1)$, $T_{\mathcal{P}}(I_2)$ e $T_{\mathcal{P}}(I_3)$.

4. Seja $\mathcal{P}$ o programa

$$\begin{aligned} p(f(X), g(Y)) &\leftarrow p(X, Y) \\ p(a, a) &\leftarrow \\ p(a, b) &\leftarrow \end{aligned}$$

, G o objectivo $\leftarrow p(X, Y)$.

Quais das substituições seguintes são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$? Para as substituições θ que são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ determina uma resposta calculada σ para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e uma substituição γ tal que $\theta = \sigma\gamma$. Representa ainda a refutação-SLD que corresponde a σ por uma árvore de derivação.

- $\theta = [a/X, a/Y, b/Z];$
- $\theta = [a/X];$
- $\theta = [a/X, X/Y];$
- $\theta = [a/X, b/Y];$
- $\theta = [f(X)/X, g(Y)/Y];$
- $\theta = [f(f(a))/X, g(g(a))/Y].$

5. Seja $\mathcal{P}$ o programa seguinte:

$$\begin{aligned} s(h(X)) &\leftarrow r(X), p(h(X)) \\ r(a) &\leftarrow \\ r(b) &\leftarrow \\ p(a) &\leftarrow \\ p(h(X)) &\leftarrow \end{aligned}$$

- (a) Escreve cada fórmula do programa $\mathcal{P}$ sem ser na notação clausal.

- (b) Mostra que $\mathcal{P} \vdash \exists X s(X)$.
- (c) Determina o conjunto de termos $\{t \in \mathcal{T}_0 \mid \mathcal{P} \vdash s(t)\}$.
- (d) Determina o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

6. Considera o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{aligned} s(f(X)) &\leftarrow s(X), r(Y) \\ r(b) &\leftarrow \\ r(f(X)) &\leftarrow r(X) \end{aligned}$$

- (a) Escreve cada fórmula do programa sem ser na *notação clausal* (i.e com os quantificadores e operações lógicas usuais).
- (b) Determina L_P , U_P e B_P .
- (c) Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $T_P \uparrow 2$, $\dots$, $T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.

7. Considera G o objectivo $\leftarrow p(X, X)$ e o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{aligned} p(a, b) &\leftarrow \\ p(X, Z) &\leftarrow p(X, Y), p(Y, Z) \\ p(X, Y) &\leftarrow p(Y, X) \end{aligned}$$

- (a) Calcula uma refutação-**SLD** para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e indica a resposta calculada.
- (b) Justifica a veracidade ou a falsidade das seguintes afirmações:
 1. $\mathcal{P} \models \exists X p(X, X)$
 2. $\mathcal{P} \models \forall X p(X, X)$
- (c) Determina M_P e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

8. Para o programa definido $\mathcal{P}$ e objectivo G (da forma $\leftarrow \beta$) descritos abaixo:

- Escreve cada fórmula do programa e do objectivo sem ser em notação clausal (i.e com quantificadores e operações lógicas)
- Determina L_P , U_P e B_P .
- Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $\dots$, $T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.
- Determina M_P e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.
- Calcula uma refutação **SLD** para $\mathcal{P} \cup \{G\}$, indicando as substituições em cada passo e a resposta calculada, no fim. Representa a refutação-**SLD** por uma árvore de derivação.
- Justifica a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações:
 1. $\mathcal{P} \models \exists \beta$
 2. $\mathcal{P} \models \forall \beta$
- Verifica a execução do programa com o objectivo em Prolog.

$$(a) \quad \begin{aligned} P : \quad & \text{add}(X, 0, X) \leftarrow \\ & \text{add}(X, s(Y), s(Z)) \leftarrow \text{add}(X, Y, Z) \end{aligned}$$

$$G : \quad \leftarrow \text{add}(s(0), X, s(s(Y)))$$

- (b) $P : \text{length}(\text{nil}, 0) \leftarrow$
 $\text{length}(\text{cons}(X, Y), s(Z)) \leftarrow \text{length}(Y, Z)$
- $G : \leftarrow \text{length}(X, s(s(Y)))$
- (c) $P : \text{append}(\text{cons}(X, X_R), X_L, \text{cons}(X, X_{RL})) \leftarrow \text{append}(X_R, X_L, X_{RL})$
 $\text{append}(\text{nil}, X_L, X_L) \leftarrow$
- $G : \leftarrow \text{append}(\text{cons}(X, \text{nil}), \text{cons}(X, \text{nil}), Y)$
- (d) $P : \text{member}(X, \text{cons}(X, Y)) \leftarrow$
 $\text{member}(X, \text{cons}(Y, Z)) \leftarrow \text{member}(X, Z)$
- $G : \leftarrow \text{member}(X, \text{cons}(Y, \text{cons}(X, Z)))$
- (e) $P : \text{split}(\text{cons}(X, Y), \text{cons}(X, \text{nil}), Y) \leftarrow$
 $\text{split}(\text{cons}(X, Y), \text{cons}(X, X_1), Y_1) \leftarrow \text{split}(Y, X_1, Y_1)$
- $G : \leftarrow \text{split}(\text{cons}(Y, \text{cons}(X, \text{nil})), Z, W)$
- (f) $P : p(s(X), Y) \leftarrow i(Y, Z), p(X, Z)$
 $p(\text{nil}, Y) \leftarrow f(Y)$
 $i(a, b) \leftarrow$
 $i(b, c) \leftarrow$
 $i(c, b) \leftarrow$
 $f(b) \leftarrow$
- $G : \leftarrow p(s(X), a)$
- (g) $P : o(r(X)) \leftarrow p(X)$
 $p(0) \leftarrow$
 $p(r(r(X))) \leftarrow p(X)$
- $G : \leftarrow o(r(r(r(X))))$

Resolução de exercícios selecionados

Resolução (6.a)

$$\forall X \forall Y (s(f(X)) \vee \neg s(X) \vee \neg r(Y))$$

$$r(b)$$

$$\forall X (r(f(X)) \vee \neg r(X))$$

Resolução (6.b)

$$L_P : \mathcal{F}_0 = \{b\}, \mathcal{F}_1 = \{f\},$$

$$\mathcal{R}_1 = \{s, r\}$$

$$U_P = \{b, f(b), f(f(b)), \dots\}$$

$$B_P = \{s(b), r(b), s(f(b)), r(f(b)), s(f(f(b))), r(f(f(b))), \dots\}$$

Resolução (6.c)

$$\begin{aligned} T_P \uparrow 0 &= \emptyset \\ T_P \uparrow 1 &= \{r(b)\} \\ T_P \uparrow 2 &= \{r(b), r(f(b))\} \\ T_P \uparrow n &= \{r(f^k(b)) \mid 0 \leq k \leq n-1\} \\ T_P \uparrow \omega &= \{r(f^n(b)) \mid n \geq 0\} \end{aligned}$$

Resolução (7.a)

$$\begin{array}{ll} \leftarrow p(X, X) & p(X_1, z_1) \leftarrow p(X_1, Y_1), p(Y_1, Z_1) \\ & \sigma_1 = [X/X_1, X/z_1] \\ \leftarrow p(X, Y_1), p(Y_1, X) & p(a, b) \leftarrow \\ & \sigma_2 = [a/X/, b/Y_1] \\ \leftarrow p(b, a) & p(X_2, Y_2) \leftarrow p(Y_2, X_2) \\ & \sigma_3 = [b/X_2/, a/Y_2] \\ \leftarrow p(a, b) & p(a, b) \leftarrow \\ & \sigma_4 = \iota \end{array}$$

$\in$

$$\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4 = [a/X_1, a/Z_1, a/X, b/Y_1, b/X_2, a/Y_2]$$

Resposta calculada: $\sigma = [a/X]$

Resolução (7.b)

1. true Como G é $\neg \exists X p(X, X)$ e, pela alinea (a) $P \cup \{\neg \exists X p(X, X)\}$ não é satisfazível, tem-se que $\mathcal{P} \models \exists X p(X, X)$.
2. false Seja $\mathcal{A} = (\{a, b, c\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $a^{\mathcal{A}} = a$, $b^{\mathcal{A}} = b$ e $p^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$. Temos que $\mathcal{A} \models \mathcal{P}$ (verifica!) e $\mathcal{A} \not\models \forall X p(X, X)$ (porque $(c, c) \notin p^{\mathcal{A}}$).

Resolução (7.c)

$$M_{\mathcal{P}} = T_P \uparrow \omega \text{ e}$$

$$\begin{aligned} T_P \uparrow 0 &= \emptyset \\ T_P \uparrow 1 &= \{p(a, b)\} \\ T_P \uparrow 2 &= \{p(a, b), p(b, a)\} \\ T_P \uparrow 3 &= \{p(a, b), p(b, a), p(a, a), p(b, b)\} \\ T_P \uparrow 4 &= T_P \uparrow 3 \\ T_P \uparrow n &= T_P \uparrow 3 \\ T_P \uparrow \omega &= T_P \uparrow 3 \end{aligned}$$

O modelo mínimo de $\mathcal{P}$ é a estrutura $\mathcal{A}_P = (\{a, b\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $a^{\mathcal{A}} = a$, $b^{\mathcal{A}} = b$ e $p^{\mathcal{A}} = \{(a, a), (a, b), (b, a), (b, b)\}$