Semânticas de Linguagens de Programação - CC3033

Exercícios 9

Programação em Lógica

1 Semântica da Programação em Lógica

1. Escreve as cláusulas abaixo sem ser em notação clausal:

   $\mathsf{p(a) \leftarrow p(X), q(X)}$
   $\mathsf{p(f(X)) \leftarrow p(X)}$
   $\mathsf{q(b) \leftarrow}$
   $\mathsf{q(f(X)) \leftarrow q(X)}$
   $\mathsf{\leftarrow q(f(f(a)))}$

2. Usando o sistema de reescrita dado nas aulas, calcula um umg (unificador mais geral) ou indica que não existe para cada um dos seguintes conjuntos de equações de termos:

   (a) $\{g(a, X, h(g(Z))) = g(Z, h(Y), h(Y))\}$
   (b) $\{X = g(Y), g(U) = g(Z), U = a\}$
   (c) $\{g(X, f(X, W)) = g(g(W), f(g(b), Z))\}$
   (d) $\{g(Z, h(Z), Z) = g(f(V), h(h(X)), X)\}$

3. Considera o programa $\mathcal{P}$

   $$\mathsf{p(f(X)) \leftarrow p(X)}$$
   $$\mathsf{q(a) \leftarrow p(X)}$$

   Para $I_1 = B_{\mathcal{P}}$, $I_2 = T_{\mathcal{P}}(I_1)$ e $I_3 = \emptyset$ determina $T_{\mathcal{P}}(I_1)$, $T_{\mathcal{P}}(I_2)$ e $T_{\mathcal{P}}(I_3)$.

4. Seja $\mathcal{P}$ o programa

   $$\mathsf{p(f(X), g(Y)) \leftarrow p(X, Y)}$$
   $$\mathsf{p(a, a) \leftarrow}$$
   $$\mathsf{p(a, b) \leftarrow}$$

   , G o objectivo $\leftarrow \mathsf{p(X, Y)}$.

   Quais das substituições seguintes são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$? Para as substituições θ que são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ determina uma resposta calculada σ para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e uma substituição γ tal que $\theta = \sigma\gamma$. Representa ainda a refutação-SLD que corresponde a σ por uma árvore de derivação.

   - $\theta = [a/X, a/Y, b/Z]$;
   - $\theta = [a/X]$;
   - $\theta = [a/X, X/Y]$;
   - $\theta = [a/X, b/Y]$;
   - $\theta = [f(X)/X, g(Y)/Y]$;
   - $\theta = [f(f(a))/X, g(g(a))/Y]$.

5. Seja $\mathcal{P}$ o programa seguinte:

   $$\mathsf{s(h(X))) \leftarrow r(X), p(h(X))}$$
   $$\mathsf{r(a) \leftarrow}$$
   $$\mathsf{r(b) \leftarrow}$$
   $$\mathsf{p(a) \leftarrow}$$
   $$\mathsf{p(h(X)) \leftarrow}$$

   (a) Escreve cada fórmula do programa $\mathcal{P}$ sem ser na notação clausal.

(b) Mostra que $\mathcal{P} \vdash \exists X \mathsf{s}(\mathsf{X})$.

(c) Determina o conjunto de termos $\{\mathsf{t} \in \mathcal{T}_0 \mid \mathcal{P} \vdash \mathsf{s}(\mathsf{t})\}$.

(d) Determina o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

6. Considera o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{array}{l} \mathsf{s}(\mathsf{f}(\mathsf{X})) \leftarrow \mathsf{s}(\mathsf{X}), \mathsf{r}(\mathsf{Y}) \\ \mathsf{r}(\mathsf{b}) \leftarrow \\ \mathsf{r}(\mathsf{f}(\mathsf{X})) \leftarrow \mathsf{r}(\mathsf{X}) \end{array}$$

(a) Escreve cada fórmula do programa sem ser na *notação clausal* (i.e com os quantificadores e operações lógicas usuais).

(b) Determina L_P, U_P e B_P.

(c) Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $T_P \uparrow 2$, $\ldots$, $T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.

7. Considera G o objectivo $\leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$ e o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{array}{l} \mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \leftarrow \\ \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Z}) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}), \mathsf{p}(\mathsf{Y}, \mathsf{Z}) \\ \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{Y}, \mathsf{X}) \end{array}$$

(a) Calcula uma refutação-**SLD** para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e indica a resposta calculada.

(b) Justifica a veracidade ou a falsidade das seguintes afirmações:

1. $\mathcal{P} \models \exists \mathsf{X}\, \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$
2. $\mathcal{P} \models \forall \mathsf{X}\, \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$

(c) Determina $M_{\mathcal{P}}$ e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

8. Para o programa definido $\mathcal{P}$ e objectivo G (da forma $\leftarrow \beta$) descritos abaixo:

- Escreve cada fórmula do programa e do objectivo sem ser em notação clausal (i.e com quantificadores e operações lógicas)
- Determina L_P, U_P e B_P.
- Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $\ldots T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.
- Determina M_P e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.
- Calcula uma refutação **SLD** para $P \cup \{G\}$, indicando as substituições em cada passo e a resposta calculada, no fim. Representa a refutação-SLD por uma árvore de derivação.
- Justifica a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações:
  1. $\mathcal{P} \models \exists \beta$
  2. $\mathcal{P} \models \forall \beta$
- Verifica a execução do programa com o objectivo em Prolog.

(a) $P:$ $\mathsf{add}(\mathsf{X}, 0, \mathsf{X}) \leftarrow$
$\mathsf{add}(\mathsf{X}, \mathsf{s}(\mathsf{Y}), \mathsf{s}(\mathsf{Z})) \leftarrow \mathsf{add}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}, \mathsf{Z})$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{add}(\mathsf{s}(0), \mathsf{X}, \mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{Y})))$

(b) $P:$ $\mathsf{length}(\mathsf{nil},0) \leftarrow$
$\mathsf{length}(\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{Y}),\mathsf{s}(\mathsf{Z})) \leftarrow \mathsf{length}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{length}(\mathsf{X},\mathsf{s}(\mathsf{s}(\mathsf{Y})))$

(c) $P:$ $\mathsf{append}(\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{X_R}),\mathsf{X_L},\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{X_{RL}})) \leftarrow \mathsf{append}(\mathsf{X_R},\mathsf{X_L},\mathsf{X_{RL}})$
$\mathsf{append}(\mathsf{nil},\mathsf{X_L},\mathsf{X_L}) \leftarrow$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{append}(\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{nil}),\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{nil}),\mathsf{Y})$

(d) $P:$ $\mathsf{member}(\mathsf{X},\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{Y})) \leftarrow$
$\mathsf{member}(\mathsf{X},\mathsf{cons}(\mathsf{Y},\mathsf{Z})) \leftarrow \mathsf{member}(\mathsf{X},\mathsf{Z})$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{member}(\mathsf{X},\mathsf{cons}(\mathsf{Y},\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{Z})))$

(e) $P:$ $\mathsf{split}(\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{Y}),\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{nil}),\mathsf{Y}) \leftarrow$
$\mathsf{split}(\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{Y}),\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{X_1}),\mathsf{Y_1}) \leftarrow \mathsf{split}(\mathsf{Y},\mathsf{X_1},\mathsf{Y_1})$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{split}(\mathsf{cons}(\mathsf{Y},\mathsf{cons}(\mathsf{X},\mathsf{nil})),\mathsf{Z},\mathsf{W})$

(f) $P:$ $\mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{X}),\mathsf{Y}) \leftarrow \mathsf{i}(\mathsf{Y},\mathsf{Z}),\mathsf{p}(\mathsf{X},\mathsf{Z})$
$\mathsf{p}(\mathsf{nil},\mathsf{Y}) \leftarrow \mathsf{f}(\mathsf{Y})$
$\mathsf{i}(\mathsf{a},\mathsf{b}) \leftarrow$
$\mathsf{i}(\mathsf{b},\mathsf{c}) \leftarrow$
$\mathsf{i}(\mathsf{c},\mathsf{b}) \leftarrow$
$\mathsf{f}(\mathsf{b}) \leftarrow$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{s}(\mathsf{X}),\mathsf{a})$

(g) $P:$ $\mathsf{o}(\mathsf{r}(\mathsf{X})) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X})$
$\mathsf{p}(0) \leftarrow$
$\mathsf{p}(\mathsf{r}(\mathsf{r}(\mathsf{X}))) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X})$

$G:$ $\leftarrow \mathsf{o}(\mathsf{r}(\mathsf{r}(\mathsf{r}(\mathsf{X}))))$

Resolução de exercícios selecionados

Resolução (6.a)

$$\begin{array}{l} \forall \mathsf{X}\forall \mathsf{Y}\,(\mathsf{s}(\mathsf{f}(\mathsf{X})) \;\lor\; \neg\mathsf{s}(\mathsf{X}) \;\lor\; \neg\mathsf{r}(\mathsf{Y})) \\ \mathsf{r}(\mathsf{b}) \\ \forall \mathsf{X}\,(\mathsf{r}(\mathsf{f}(\mathsf{X})) \;\lor\; \neg\mathsf{r}(\mathsf{X})) \end{array}$$

Resolução (6.b)

$L_P : \mathcal{F}_0 = \{\mathsf{b}\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{f}\}$,
$\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{s},\mathsf{r}\}$
$U_P = \{\mathsf{b},\mathsf{f}(\mathsf{b}),\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b})),\ldots\}$

$B_P = \{\mathsf{s(b)}, \mathsf{r(b)}, \mathsf{s(f(b))}, \mathsf{r(f(b))}, \mathsf{s(f(f(b)))}, \mathsf{r(f(f(b)))}, \ldots\}$

Resolução (6.c)

$$\begin{aligned}
T_P \uparrow 0 &= \emptyset \\
T_P \uparrow 1 &= \{\mathsf{r(b)}\} \\
T_P \uparrow 2 &= \{\mathsf{r(b)}, \mathsf{r(f(b))}\} \\
T_P \uparrow n &= \{\mathsf{r(f^k(b))} \mid 0 \leq k \leq n-1\} \\
T_P \uparrow \omega &= \{\mathsf{r(f^n(b))} \mid n \geq 0\}
\end{aligned}$$

Resolução (7.a)

$\leftarrow \mathsf{p(X,X)}$	$\mathsf{p(X_1,z_1)} \leftarrow \mathsf{p(X_1,Y_1)}, \mathsf{p(Y_1,Z_1)}$
	$\sigma_1 = [\mathsf{X/X_1}, \mathsf{X/z_1}]$
$\leftarrow \mathsf{p(X,Y_1)}, \mathsf{p(Y_1,X)}$	$\mathsf{p(a,b)} \leftarrow$
	$\sigma_2 = [\mathsf{a/X/}, \mathsf{b/Y_1}]$
$\leftarrow \mathsf{p(b,a)}$	$\mathsf{p(X_2,Y_2)} \leftarrow \mathsf{p(Y_2,X_2)}$
	$\sigma_3 = [\mathsf{b/X_2/}, \mathsf{a/Y_2}]$
$\leftarrow \mathsf{p(a,b)}$	$\mathsf{p(a,b)} \leftarrow$
	$\sigma_4 = \iota$
ϵ	

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = [\mathsf{a/X_1}, \mathsf{a/Z_1}, \mathsf{a/X}, \mathsf{b/Y_1}, \mathsf{b/X_2}, \mathsf{a/Y_2}]$

Resposta calculada:$\sigma = [\mathsf{a/X}]$

Resolução (7.b)

1. true Como G é $\neg\exists \mathsf{Xp(X,X)}$ e, pela alinea (a) $P \cup \{\neg\exists \mathsf{Xp(X,X)}\}$ não é satisfazível, tem-se que $\mathcal{P} \models \exists \mathsf{Xp(X,X)}$.

2. false Seja $\mathcal{A} = (\{\mathsf{a,b,c}\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $\mathsf{a}^{\mathcal{A}} = \mathsf{a}$, $\mathsf{b}^{\mathcal{A}} = \mathsf{b}$ e $\mathsf{p}^{\mathcal{A}} = \{(\mathsf{a,a}), (\mathsf{a,b}), (\mathsf{b,a}), (\mathsf{b,b})\}$. Temos que $\mathcal{A} \models \mathcal{P}$ (verifica!) e $\mathcal{A} \not\models \forall \mathsf{X}\, \mathsf{p(X,X)}$ (porque $(\mathsf{c,c}) \notin \mathsf{p}^{\mathcal{A}}$).

Resolução (7.c)

$M_{\mathcal{P}} = T_P \uparrow \omega$ e

$$\begin{aligned}
T_P \uparrow 0 &= \emptyset \\
T_P \uparrow 1 &= \{\mathsf{p(a,b)}\} \\
T_P \uparrow 2 &= \{\mathsf{p(a,b)}, \mathsf{p(b,a)}\} \\
T_P \uparrow 3 &= \{\mathsf{p(a,b)}, \mathsf{p(b,a)}, \mathsf{p(a,a)}, \mathsf{p(b,b)}\} \\
T_P \uparrow 4 &= T_P \uparrow 3 \\
T_P \uparrow n &= T_P \uparrow 3 \\
T_P \uparrow \omega &= T_P \uparrow 3
\end{aligned}$$

O modelo mínimo de $\mathcal{P}$ é a estrutura $\mathcal{A}_P = (\{\mathsf{a,b}\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $\mathsf{a}^{\mathcal{A}} = \mathsf{a}$, $\mathsf{b}^{\mathcal{A}} = \mathsf{b}$ e $p^{\mathcal{A}} = \{(\mathsf{a,a}), (\mathsf{a,b}), (\mathsf{b,a}), (\mathsf{b,b})\}$