Semânticas de Linguagens de Programação - CC3033

Exercícios 11

Programação em Lógica

1 Semântica de Programação em Lógica

1. Escreve as cláusulas abaixo sem ser em notação clausal:

   $p(a) \leftarrow p(X), q(X)$
   $p(f(X)) \leftarrow p(X)$
   $q(b) \leftarrow$
   $q(f(X)) \leftarrow q(X)$
   $\leftarrow q(f(f(a)))$

2. Usando o sistema de reescrita dado nas aulas, calcula um umg (unificador mais geral) ou indica que não existe para cada um dos seguintes conjuntos de equações de termos:

   (a) $\{g(a, X, h(g(Z))) = g(Z, h(Y), h(Y))\}$
   (b) $\{X = g(Y), g(U) = g(Z), U = a\}$
   (c) $\{g(X, f(X, W)) = g(g(W), f(g(b), Z))\}$
   (d) $\{g(Z, h(Z), Z) = g(f(V), h(h(X)), X)\}$

3. Para o programa definido $\mathcal{P}$ e objectivo G (da forma $\leftarrow \beta$) descritos abaixo:

   - Calcula uma refutação **SLD** para $\mathcal{P} \cup \{G\}$, indicando as substituições em cada passo e a resposta calculada, no fim. Representa a refutação-SLD por uma árvore de derivação.
   - Verifica a execução do programa com o objectivo implementando-o em Prolog.

   (a) $P: \quad Add(X, 0, X) \leftarrow$
   $\quad\quad Add(X, s(Y), s(Z)) \leftarrow Add(X, Y, Z)$

   $G: \quad \leftarrow Add(s(0), X, s(s(Y))$

   (b) $P: \quad Length(nil, 0) \leftarrow$
   $\quad\quad Length(cons(X, Y), s(Z)) \leftarrow Length(Y, Z)$

   $G: \quad \leftarrow Length(X, s(s(Y)))$

4. Considera o programa $\mathcal{P}$

   $$p(f(X)) \leftarrow p(X)$$
   $$q(a) \leftarrow p(X)$$

   Para $I_1 = B_{\mathcal{P}}$, $I_2 = T_{\mathcal{P}}(I_1)$ e $I_3 = \emptyset$ determina $T_{\mathcal{P}}(I_1)$, $T_{\mathcal{P}}(I_2)$ e $T_{\mathcal{P}}(I_3)$.

5. Seja $\mathcal{P}$ o programa

   $$\mathsf{p}(\mathsf{f}(\mathsf{X}), \mathsf{g}(\mathsf{Y})) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$$
   $$\mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{a}) \leftarrow$$
   $$\mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \leftarrow$$

   , G o objectivo $\leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Y})$.

   Quais das substituições seguintes são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$? Para as substituições θ que são respostas correctas para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ determina uma resposta calculada σ para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e uma substituição γ tal que $\theta = \sigma\gamma$. Representa ainda a refutação-SLD que corresponde a σ por uma árvore de derivação.

- $\theta = [a/X, a/Y, b/Z]$;
- $\theta = [a/X]$;
- $\theta = [a/X, X/Y]$;
- $\theta = [a/X, b/Y]$;
- $\theta = [f(X)/X, g(Y)/Y]$;
- $\theta = [f(f(a))/X, g(g(a))/Y]$.

6. Seja $\mathcal{P}$ o programa seguinte:

$$\begin{array}{l} \mathsf{s(h(X))) \leftarrow r(X), p(h(X))} \\ \mathsf{r(a)} \leftarrow \\ \mathsf{r(b)} \leftarrow \\ \mathsf{p(a)} \leftarrow \\ \mathsf{p(h(X))} \leftarrow \end{array}$$

   (a) Escreve cada fórmula do programa $\mathcal{P}$ sem ser na notação clausal.
   (b) Mostra que $\mathcal{P} \vdash \exists X \mathsf{s(X)}$.
   (c) Determina o conjunto de termos $\{\mathsf{t} \in \mathcal{T}_0 \,|\, \mathcal{P} \vdash \mathsf{s(t)}\}$.
   (d) Determina o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

7. Considera o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{array}{l} \mathsf{s(f(X)) \leftarrow s(X), r(Y)} \\ \mathsf{r(b)} \leftarrow \\ \mathsf{r(f(X)) \leftarrow r(X)} \end{array}$$

   (a) Escreve cada fórmula do programa sem ser na *notação clausal* (i.e com os quantificadores e operações lógicas usuais).
   (b) Determina L_P, U_P e B_P.
   (c) Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $T_P \uparrow 2$, $\ldots$, $T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.

8. Considera G o objectivo $\leftarrow \mathsf{p(X, X)}$ e o programa $\mathcal{P}$ seguinte:

$$\begin{array}{l} \mathsf{p(a, b)} \leftarrow \\ \mathsf{p(X, Z) \leftarrow p(X, Y), p(Y, Z)} \\ \mathsf{p(X, Y) \leftarrow p(Y, X)} \end{array}$$

   (a) Calcula uma refutação-**SLD** para $\mathcal{P} \cup \{G\}$ e indica a resposta calculada.
   (b) Justifica a veracidade ou a falsidade das seguintes afirmações:
      1. $\mathcal{P} \models \exists \mathsf{X}\, \mathsf{p(X, X)}$
      2. $\mathcal{P} \models \forall \mathsf{X}\, \mathsf{p(X, X)}$
   (c) Determina $M_{\mathcal{P}}$ e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.

9. Para o programa definido $\mathcal{P}$ e objectivo G (da forma $\leftarrow \beta$) descritos abaixo:

   - Escreve cada fórmula do programa e do objectivo sem ser em notação clausal (i.e com quantificadores e operações lógicas)

- Determina L_P, U_P e B_P.
- Calcula $T_P \uparrow 0$, $T_P \uparrow 1$, $\ldots T_P \uparrow n$ e $T_P \uparrow \omega$.
- Determina M_P e o modelo mínimo de Herbrand de $\mathcal{P}$.
- Calcula uma refutação **SLD** para $P \cup \{G\}$, indicando as substituições em cada passo e a resposta calculada, no fim. Representa a refutação-SLD por uma árvore de derivação.
- Justifica a veracidade ou falsidade das seguintes afirmações:
  1. $\mathcal{P} \models \exists\beta$
  2. $\mathcal{P} \models \forall\beta$
- Verifica a execução do programa com o objectivo em Prolog.

(a) $P:$ $Add(X, 0, X) \leftarrow$
$Add(X, s(Y), s(Z)) \leftarrow Add(X, Y, Z)$

$G: \ \leftarrow Add(s(0), X, s(s(Y))$

(b) $P:$ $Length(nil, 0) \leftarrow$
$Length(cons(X, Y), s(Z)) \leftarrow Length(Y, Z)$

$G: \ \leftarrow Length(X, s(s(Y)))$

(c) $P:$ $Append(cons(X, X_R), X_L, cons(X, X_{RL})) \leftarrow Append(X_R, X_L, X_{RL})$
$Append(nil, X_L, X_L) \leftarrow$

$G: \ \leftarrow Append(cons(X, nil), cons(X, nil), Y)$

(d) $P:$ $Member(X, cons(X, Y)) \leftarrow$
$Member(X, cons(Y, Z)) \leftarrow Member(X, Z)$

$G: \ \leftarrow Member(X, cons(Y, cons(X, Z)))$

(e) $P:$ $Split(cons(X, Y), cons(X, nil), Y) \leftarrow$
$Split(cons(X, Y), cons(X, X_1), Y_1) \leftarrow Split(Y, X_1, Y_1)$

$G: \ \leftarrow Split(cons(Y, cons(X, nil)), Z, W)$

(f) $P:$ $p(s(X), Y) \leftarrow I(Y, Z), p(X, Z)$
$p(\mathsf{nil}, Y) \leftarrow Fi(Y)$
$I(a, b) \leftarrow$
$I(b, c) \leftarrow$
$I(c, b) \leftarrow$
$Fi(b) \leftarrow$

$G: \ \leftarrow p(s(X), a)$

(g) $P: \quad O(r(X)) \leftarrow p(X)$
$p(0) \leftarrow$
$p(r(r(X))) \leftarrow p(X)$

$G: \quad \leftarrow O(r(r(r(X))))$

Resolução de exercícios selecionados

Resolução (7.a)

$$\begin{array}{l} \forall X \forall Y\,(s(f(X)) \;\vee\; \neg s(X) \;\vee\; \neg r(Y)) \\ r(b) \\ \forall X\,(r(f(X)) \;\vee\; \neg r(X)) \end{array}$$

Resolução (7.b)

$L_P : \mathcal{F}_0 = \{\mathsf{b}\}$, $\mathcal{F}_1 = \{\mathsf{f}\}$,
$\mathcal{R}_1 = \{\mathsf{s}, \mathsf{r}\}$
$U_P = \{\mathsf{b}, \mathsf{f}(\mathsf{b}), \mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \ldots\}$
$B_P = \{\mathsf{s}(\mathsf{b}), \mathsf{r}(\mathsf{b}), \mathsf{s}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{r}(\mathsf{f}(\mathsf{b})), \mathsf{s}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))), \mathsf{r}(\mathsf{f}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))), \ldots\}$

Resolução (7.c)

$$\begin{array}{rcl} T_P \uparrow 0 & = & \emptyset \\ T_P \uparrow 1 & = & \{\mathsf{r}(\mathsf{b})\} \\ T_P \uparrow 2 & = & \{\mathsf{r}(\mathsf{b}), \mathsf{r}(\mathsf{f}(\mathsf{b}))\} \\ T_P \uparrow n & = & \{\mathsf{r}(\mathsf{f}^{\mathsf{k}}(\mathsf{b})) \mid 0 \leq k \leq n-1\} \\ T_P \uparrow \omega & = & \{\mathsf{r}(\mathsf{f}^{\mathsf{n}}(\mathsf{b})) \mid n \geq 0\} \end{array}$$

Resolução (8.a)

$$\begin{array}{ll} \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X}) & \mathsf{p}(\mathsf{X}_1, \mathsf{z}_1) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}_1, \mathsf{Y}_1), \mathsf{p}(\mathsf{Y}_1, \mathsf{z}_1) \\ & \sigma_1 = [\mathsf{x}/\mathsf{X}_1, \mathsf{x}/\mathsf{z}_1] \\ \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{Y}_1), \mathsf{p}(\mathsf{Y}_1, \mathsf{X}) & \mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \leftarrow \\ & \sigma_2 = [\mathsf{a}/\mathsf{x}/, \mathsf{b}/\mathsf{Y}_1] \\ \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{b}, \mathsf{a}) & \mathsf{p}(\mathsf{X}_2, \mathsf{Y}_2) \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{Y}_2, \mathsf{X}_2) \\ & \sigma_3 = [\mathsf{b}/\mathsf{X}_2/, \mathsf{a}/\mathsf{Y}_2] \\ \leftarrow \mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) & \mathsf{p}(\mathsf{a}, \mathsf{b}) \leftarrow \\ & \sigma_4 = \iota \\ \epsilon & \end{array}$$

$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = [\mathsf{a}/\mathsf{X}_1, \mathsf{a}/\mathsf{z}_1, \mathsf{a}/\mathsf{X}, \mathsf{b}/\mathsf{Y}_1, \mathsf{b}/\mathsf{X}_2, \mathsf{a}/\mathsf{Y}_2]$
Resposta calculada:$\sigma = [\mathsf{a}/\mathsf{x}]$

Resolução (8.b)

1. true Como G é $\neg\exists \mathsf{X} \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$ e, pela alinea (a) $P \cup \{\neg\exists \mathsf{X}\mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})\}$ não é satisfazível, tem-se que $\mathcal{P} \models \exists \mathsf{X}\mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$.

2. false Seja $\mathcal{A} = (\{\mathsf{a}, \mathsf{b}, \mathsf{c}\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $\mathsf{a}^{\mathcal{A}} = \mathsf{a}$, $\mathsf{b}^{\mathcal{A}} = \mathsf{b}$ e $\mathsf{p}^{\mathcal{A}} = \{(\mathsf{a}, \mathsf{a}), (\mathsf{a}, \mathsf{b}), (\mathsf{b}, \mathsf{a}), (\mathsf{b}, \mathsf{b})\}$. Temos que $\mathcal{A} \models \mathcal{P}$ (verifica!) e $\mathcal{A} \not\models \forall \mathsf{X}\, \mathsf{p}(\mathsf{X}, \mathsf{X})$ (porque $(\mathsf{c}, \mathsf{c}) \notin \mathsf{p}^{\mathcal{A}}$).

Resolução (8.c)

$M_{\mathcal{P}} = T_P \uparrow \omega$ e

$$\begin{array}{rcl} T_P \uparrow 0 & = & \emptyset \\ T_P \uparrow 1 & = & \{\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{b})\} \\ T_P \uparrow 2 & = & \{\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{b}), \mathsf{p}(\mathsf{b},\mathsf{a})\} \\ T_P \uparrow 3 & = & \{\mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{b}), \mathsf{p}(\mathsf{b},\mathsf{a}), \mathsf{p}(\mathsf{a},\mathsf{a}), \mathsf{p}(\mathsf{b},\mathsf{b})\} \\ T_P \uparrow 4 & = & T_P \uparrow 3 \\ T_P \uparrow n & = & T_P \uparrow 3 \\ T_P \uparrow \omega & = & T_P \uparrow 3 \end{array}$$

O modelo mínimo de $\mathcal{P}$ é a estrutura $\mathcal{A}_P = (\{\mathsf{a},\mathsf{b}\}, \cdot^{\mathcal{A}})$ onde $\mathsf{a}^{\mathcal{A}} = \mathsf{a}$, $\mathsf{b}^{\mathcal{A}} = \mathsf{b}$ e $p^{\mathcal{A}} = \{(\mathsf{a},\mathsf{a}), (\mathsf{a},\mathsf{b}), (\mathsf{b},\mathsf{a}), (\mathsf{b},\mathsf{b})\}$